

Klausur mit Lösungen

Hinweis: Die roten Zahlen geben an, wie viele Punkte es auf diesen Teil der Lösung gab.
Die Klausur ist bestanden, wenn Sie 75 %, also **31,5, der 42 möglichen Punkte** erreicht haben.

Allgemeine Bemerkungen:

Keine Klammern, Quadrate, Gleichheitszeichen, Bruchstriche etc. während der Rechnung verlieren...

Wenn Sie bei einer Aufgabe verschiedene Ansätze probiert haben, machen Sie deutlich, welcher letztendlich gewertet werden soll – insbesondere wenn Sie widersprüchliche Ergebnisse erhalten haben.

1. Aufgabe [3 Punkte]

Um wie viel muss man einen Preis herabsetzen, wenn eine vorherige Preiserhöhung um 50 % rückgängig gemacht werden soll?

Zu lösen ist:

$$150 \cdot x = 100 \quad | \cdot \frac{1}{150} \quad [2]$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Der neue Preis muss also zwei Drittel des alten Preises betragen. Anders formuliert: Der alte Preis muss um ein Drittel herabgesetzt werden. [1]

Bemerkung: Warum ist „Der Preis muss um 50 % herabgesetzt werden.“ nicht richtig?
Stellen Sie sich vor, der Preis betrug vor der Preiserhöhung 100 €. Dann kostet die Ware anschließend 150 €. 50 % von 150 € entsprechen 75 € und $150 € - 75 € = 75 €$ und nicht, wie gefordert, 100 €.

2. Aufgabe [5 Punkte]

Aus einem Rechenbuch des Inders Bhaskara (um 1200 n. Chr.): Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde vom gleichen Preis, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beide haben dasselbe Vermögen. Was ist der Wert der Pferde? [zitiert nach Lambacher Schweizer (1966): Algebra 1. Stuttgart (S. 172).]

Sei x der Wert eines Pferdes. [1] Dann gilt:

Das Vermögen von Person 1 besteht aus 300 Rupien und 6 Pferden, also $300 + 6x$

Das Vermögen von Person 2 besteht aus -100 Rupien und 10 Pferden, also $-100 + 10x$

Beide Vermögen sollen gleich sein. Das ergibt die folgende Gleichung:

$$300 + 6x = -100 + 10x \quad | -6x + 100 \quad [1]$$

$$400 = 4x \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$100 = x \quad [2]$$

Ein Pferd ist also 100 Rupien wert. [1]

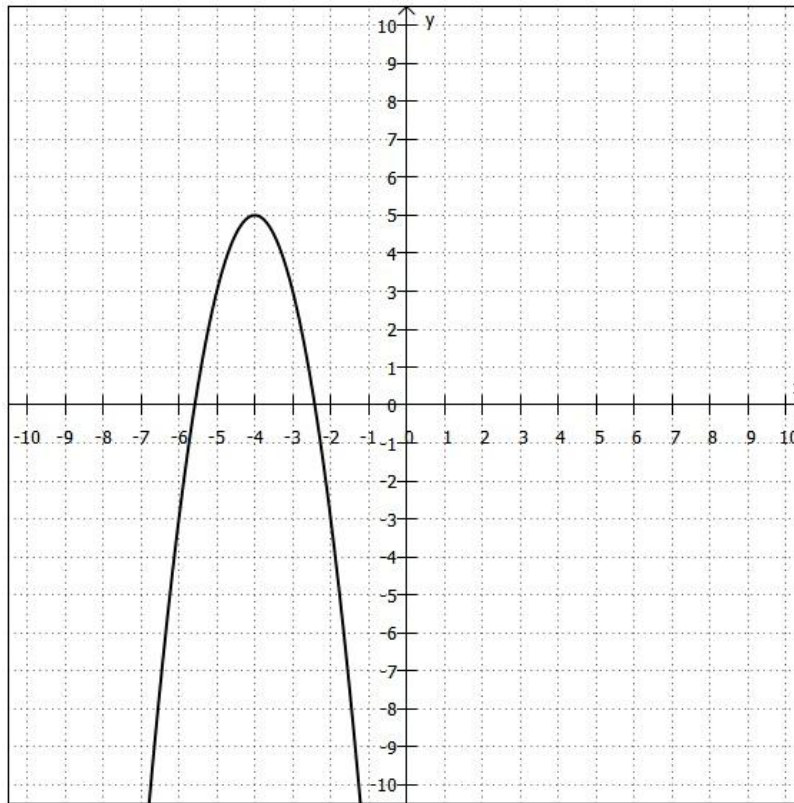
Bemerkung: Die Schulden werden als negativer Wert abgebildet.

gefördert aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL11042 im Rahmen des „Qualitätspakts Lehre“

3. Aufgabe [3 Punkte]

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der abgebildeten Funktion und multiplizieren Sie den Term – gegebenenfalls – so weit wie möglich aus!

Hinweis: Es handelt sich um eine quadratische Funktion, die ihren Scheitelpunkt in $(-4/5)$ hat. Sie verläuft außerdem u.a. durch den Punkt $(-5/3)$.



Quadratische Funktionen lassen sich in der sogenannten Scheitelpunktform darstellen:

$$f(x) = a(x - d)^2 + e \quad [0,5]$$

wobei a der Streckungs-/Stauchungsfaktor, d die x-Koordinate des Scheitels (Achtung: Minuszeichen in der Klammer) und e die y-Koordinate des Scheitels ist. [0,5] Damit ergibt sich:

$$f(x) = -2(x + 4)^2 + 5 \quad [1]$$

$$= -2(x^2 + 8x + 16) + 5$$

$$= -2x^2 - 16x - 32 + 5$$

$$= -2x^2 - 16x - 27 \quad [1]$$

Bemerkung 1: Da es sich bei dieser Funktion nicht um eine lineare handelt, kann kein Steigungsdreieck verwendet werden. Das merken Sie z.B. daran, dass hier eine Seite von einem „Steigungsdreieck“ gekrümmt wäre, bzw. daran, dass sich an verschiedenen Stellen jeweils eine andere Steigung ergibt.

Bemerkung 2: Auch die Geradengleichung hilft hier nicht weiter, da der Graph nun mal keine Gerade ist.

Bemerkung 3: Bei der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben a , b und c nichts mit den Koordinaten des Scheitelpunkts zu tun.

Bemerkung 4: Wenn Sie die Scheitelpunktform verwenden (was hier sehr sinnvoll ist): Das a vor der Klammer nicht vergessen und angeben, wofür a , d und e stehen.

Bemerkung 5: Beim Klammernaufösen aufpassen, was quadriert, was multipliziert und was nur addiert wird, z.B. wird die 5 weder quadriert noch mit -2 multipliziert.

gefördert aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL11042 im Rahmen des „Qualitätspakts Lehre“

4. Aufgabe [5+5+2 Punkte]

Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstelle(n) und den Scheitelpunkt der folgenden Funktion und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = 9x^2 + 24x - 9$$

Bestimmung der Nullstelle(n) durch Nullsetzen und Auflösen der quadratischen Gleichung (p-q-Formel):

$$9x^2 + 24x - 9 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{9}$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = 0 \quad [1]$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{\frac{8}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2 - (-1)} \\ &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + 1} \\ &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\ &= -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \quad [2] \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei $x_1 = \frac{1}{3}$ [1] und $x_2 = -3$ [1]

Bemerkung 1: Die Hälfte von $\frac{8}{3}$ ist $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ und nicht $\frac{16}{3}$ (das wäre das Doppelte von $\frac{8}{3}$).

Bemerkung 2: Je früher man kürzt, desto kleiner sind die Zahlenwerte, mit denen weiter gerechnet werden muss. Daher ist es hier auch angenehmer, die p-q-Formel anzuwenden und nicht die a-b-c-Formel (auch wenn diese natürlich ebenfalls zum richtigen Ergebnis führt).

Bestimmung des Scheitelpunkts durch quadratische Ergänzung:

$$9x^2 + 24x - 9 = 9\left(x^2 + \frac{8}{3}x - 1\right) \quad [1]$$

$$= 9\left(x^2 + 2 \cdot \frac{4}{3}x + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} - 1\right) \quad [1]$$

$$= 9\left[\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right] \quad [1]$$

$$= 9\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 25 \quad [1]$$

Der Scheitelpunkt liegt im Punkt $\left(-\frac{4}{3} / -25\right)$ [1]

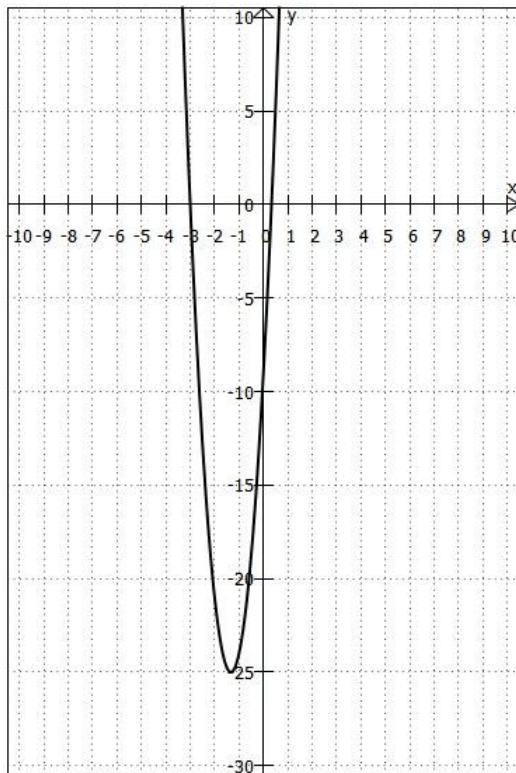
Bemerkung 1: Auch hier sollte man so früh wie möglich kürzen.

gefördert aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL11042 im Rahmen des „Qualitätspakts Lehre“

Bemerkung 2: Achten Sie darauf, richtig auszuklammern. Es darf nicht bloß die 9 vor die Klammer geschrieben und der Rest so gelassen werden: $9x^2 + 24x - 9 \neq 9(x^2 + 24x - 9)$

Bemerkung 3: Die eckigen Klammern nicht vergessen.

Skizze: [2]



Bemerkung 1: Die Skizze sollte zu den vorher berechneten Werten passen. Das bedeutet z.B., dass es hier eine positive und eine negative Nullstelle geben muss.

Bemerkung 2: In dem Koordinatensystem war keine Skala angegeben. In einem solchen Fall entscheiden Sie anhand der berechneten Werte selbst, welche Einteilung sinnvoll ist. Alle berechneten Punkte sollten sich darstellen lassen. Eine Skala ist in jedem Fall nötig.

5. Aufgabe [8+6 Punkte]

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden Funktionen (mit Begründung) und berechnen Sie die Nullstellen!

$$f_1(x) = (x^3 + 4x)e^x$$

$$f_2(x) = \ln(2x + 13)$$

Für $f_1(x)$:

Definitionsbereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ [1], da sowohl Polynome als auch die e-Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind. [1]

Nullstelle(n):

$$f_1(x) = (x^3 + 4x)e^x = 0$$

$$0 = (x^3 + 4x)e^x$$

$$0 = x(x^2 + 4)e^x \quad [1]$$

Satz vom Nullprodukt [1]

gefördert aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL11042 im Rahmen des „Qualitätspakts Lehre“

1. Faktor $0 = x_1$ [1]

2. Faktor $0 = x_2^2 + 4$ [1]

$$x_2^2 = -4$$

$$x_2 = \sqrt{-4}$$

3. Faktor $0 = e_3^x$ [1]

Aus dem 2. und 3. Faktor ergeben sich keine weiteren Nullstellen, da Wurzeln im Bereich der reellen Zahlen nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden können und die e-Funktion immer positive Werte ergibt. $\rightarrow f_1(x)$ hat eine Nullstelle bei $x_1 = 0$ [1]

Bemerkung: Beim 2. Faktor nicht zu früh die Wurzel ziehen: $0 = \sqrt{x_2^2 + 4}$ hilft nicht weiter, da aus Summen keine Wurzeln gezogen werden dürfen.

Für $f_2(x)$:

Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} =] -\frac{13}{2}; \infty[\quad [1]$$

Da Logarithmen nur für positive Argumente definiert sind, muss geprüft werden, wann

$$2x + 13 > 0 \text{ gilt. Das ist der Fall für } x > -\frac{13}{2} \quad [1]$$

Nullstelle(n):

$$f_2(x) = \ln(2x + 13) = 0$$

Da die Logarithmusfunktion dann eine Nullstelle hat, wenn das Argument 1 ist (also wegen

$$\ln(1) = 0) \quad [1], \text{ ist zu lösen:}$$

$$2x + 13 = 1 \quad | -13$$

$$2x = -12 \quad | \cdot \frac{1}{2} \quad [2]$$

$$x = -6$$

$\rightarrow f_2(x)$ hat eine Nullstelle bei $x = -6$ [1]

6. Aufgabe [3+2 Punkte]

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab und formen Sie das Ergebnis so um, dass keine Potenzen mit negativen oder gebrochenen Exponenten enthalten sind.

$$f_1(x) = -\frac{1}{x^{10}} \quad \text{mit } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_2(x) = 3\sqrt[3]{x^3} \quad \text{mit } \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$$

Für $f_1(x)$:

$$f_1(x) = -\frac{1}{x^{10}}$$

$$= -x^{-10} \quad [1]$$

$$f_1'(x) = -(-10)x^{-10-1} \quad [1]$$

$$= \frac{10}{x^{11}} \quad [1]$$

Bemerkung: $-10 - 1 = -11$ und nicht -9

gefördert aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL11042 im Rahmen des „Qualitätspakts Lehre“

Für $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 3\sqrt[3]{x^3} \\ &= 3x^{\frac{3}{3}} \\ &= 3x \end{aligned} \quad [1]$$

$$f_2'(x) = 3 \quad [1]$$

Bemerkung: Bei beiden Funktionen sollte *vor* dem Ableiten umgeformt bzw. vereinfacht werden. Dann kann nämlich die Potenzregel angewendet werden.

Bonusaufgabe [3+5 Punkte]

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich!

$$\ln(\ln(\ln(e^e)))$$

$$\left((\sqrt[3]{e})^2\right)^{\ln(8)}$$

1. Bonusaufgabe:

$$\begin{aligned} \ln(\ln(\ln(e^e))) &= \ln(\ln(e \cdot \ln(e))) & [1] \\ &= \ln(\ln(e \cdot 1)) \\ &= \ln(1) & [1] \\ &= 0 & [1] \end{aligned}$$

Bemerkung 1: Benötigt wurden hier das 3. Logarithmengesetz sowie die Tatsache $\ln(e) = 1$

Bemerkung 2: $\ln(x)$ ist keine Variable! Daher kann $\ln(\ln(\ln(e^e)))$ nicht mithilfe von Koeffizienten oder Exponenten zusammengefasst werden.

2. Bonusaufgabe:

$$\begin{aligned} \left((\sqrt[3]{e})^2\right)^{\ln(8)} &= \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^{\ln(8)} & [1] \\ &= e^{\frac{2}{3} \ln(8)} & [1] \\ &= e^{\ln\left(8^{\frac{2}{3}}\right)} & [1] \\ &= 8^{\frac{2}{3}} & [1] \\ &= (\sqrt[3]{8})^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 & [1] \end{aligned}$$

Bemerkung: Verwendet wurden das 5. Potenzgesetz, das 3. Logarithmengesetz, die Tatsache $e^{\ln(x)} = x$ sowie die Festlegung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$