Definitions- und Formelübersicht Mathematik

Mengen und Intervalle

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Elementen zu einem Ganzen. Dabei muss entscheidbar sein, ob ein Element zu der Menge gehört oder nicht.
Das Zeichen $\in$ bedeutet „**ist Element von**“ und wird sowohl bei Mengen als auch bei Intervallen benutzt. $\notin$ bedeutet im Umkehrschluss „**ist nicht Element von**“.

Zahlenbereiche sind spezielle Mengen:

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$=$	$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\dots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{\frac{p}{q}\,\middle\vert\, p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\right\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	:	Menge aller endlichen und unendlichen Dezimalzahlen

Ein **Intervall** ist die Menge aller reellen Zahlen, die zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b liegen, wobei $a < b$ ist. Man unterscheidet offene, halboffene und geschlossene Intervalle.

Grundrechenarten

Strichrechnung

Summand + Summand = Summe
Minuend – Subtrahend = Differenz

Die **Gegenzahl** zu einer Zahl bzw. das **Negative** einer Zahl a ist $-a$.
Der **Betrag** einer Zahl, als Formel $|a|$, ist ihr absoluter Wert: $|a| = \begin{cases} a, \text{falls } a \geq 0 \\ -a, \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Punktrechnung

Faktor · Faktor = Produkt
Dividend : Divisor = Quotient bzw. $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$

Wichtig: Durch 0 darf man nicht teilen!
Der **Kehrwert** zu einer Zahl $a \neq 0$ ist $\frac{1}{a}$.

Rechengesetze

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten:

das **Kommutativgesetz**: $a + b = b + a$ bzw. $a \cdot b = b \cdot a$

das **Assoziativgesetz**: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ bzw.
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

das **Distributivgesetz**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
„ausklammern“ und „ausmultiplizieren“

Wichtig: Punktrechnung geht vor Strichrechnung! Nur Klammern können diese Reihenfolge ändern!

Bruchrechnung

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{p}{q}$$

Wichtig: Nenner müssen immer ungleich 0 sein!

Erweitern
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
Kürzen
$\frac{a : c}{b : c} = \frac{a}{b}$
Addition und Subtraktion von Brüchen mit gleichem Nenner (gleichnamig)
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ bzw. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$
Multiplikation und Division
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ bzw. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Prozentrechnung

$$p = \frac{W}{G} \cdot 100$$

p: Prozentsatz (%)
W: Prozentwert
G: Grundwert

Allgemeines zu Gleichungen und Funktionen

Eine **Konstante** ist ein Platzhalter für einen festen Zahlenwert.
Eine **Variable** ist ein Platzhalter für einen veränderlichen Zahlenwert.
Ein **Term** ist eine mathematisch sinnvolle Kombination aus Zahlen, Konstanten, Variablen, Klammern und Rechenoperationen.
In einem Produkt aus Zahl und Variable wird die Zahl als **Koeffizient** bezeichnet.

Die Menge aller Zahlen, die in eine Gleichung oder einen Funktionsterm eingesetzt werden dürfen, wird **Definitionsbereich** genannt (Formelzeichen: $\mathbb{D}$).

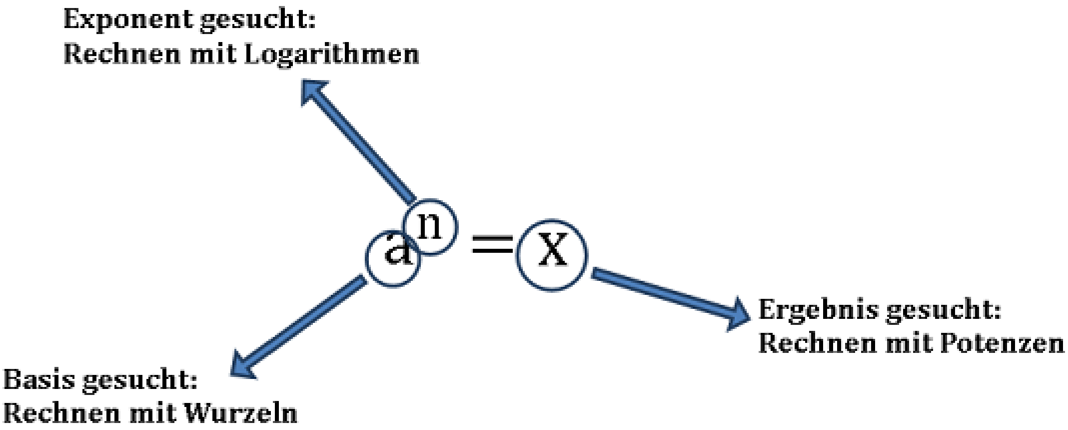
Eine **Gleichung** ist ein mathematisches Gebilde der Form „ein Term = ein (anderer) Term“.
Eine Zahl heißt **Lösung** einer Gleichung, wenn sie Element des Definitionsbereichs ist und beim Einsetzen dieser Zahl in die Gleichung beide Seiten gleich groß werden.
Die Menge aller Lösungen wird **Lösungsmenge** genannt (Formelzeichen: $\mathbb{L}$).

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, die *jedem* Element einer Menge, Definitionsbereich (Formelzeichen: $\mathbb{D}$) genannt, *genau ein* Element einer anderen Menge, Wertebereich (Formelzeichen: $\mathbb{W}$) genannt, zuordnet.

Lineare Gleichungen und Funktionen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen nur spezielle Terme erlaubt sind und zwar: Produkte aus Konstanten, Zahlen und *einer* Variable sowie Summen aus diesen Produkten und Zahlen.
Lineare Funktionen lassen sich mithilfe der **allgemeinen Geradengleichung** beschreiben:
$f(x) = y = m \cdot x + n$ mit der **Steigung** $m \in \mathbb{R}$ und dem **y-Achsenabschnitt** $n \in \mathbb{R}$.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen



Potenzen

Eine **Potenz** ist eine abkürzende Schreibweise: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n−mal}}$ mit der **Basis** $a \in \mathbb{R} \setminus_{\{0\}}$ und dem **Exponenten** $n \in \mathbb{Z}$.

Wichtig: Potenz- geht vor Punkt- geht vor Strichrechnung! Nur Klammern können dies ändern!

Zu beachten:

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^n &\geq 0 \qquad \text{wenn } n \text{ gerade} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}
\end{aligned}
$$

Die **Potenzgesetze**
Für $a, b \in \mathbb{R}\setminus_{\{0\}}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ oder für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $n, m \in \mathbb{Q}$ gelten:

1. Potenzgesetz $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. Potenzgesetz $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. Potenzgesetz $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. Potenzgesetz $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. Potenzgesetz $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel $\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Wurzeln

Aus $a^n = x$ folgt $a = \sqrt[n]{x}$ mit dem **Radikanden** $x \in \mathbb{R}_0^+$ und dem **Wurzelexponenten** $n \in \mathbb{N} \backslash_{\{0;1\}}$.

Zu beachten:

$$\sqrt[n]{x} \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt[2]{x^2} = |x| \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Da sich Wurzeln als Potenzen, nämlich $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, schreiben lassen, können die Potenzgesetze angewendet werden.

Logarithmen

Aus $a^n = x$ folgt $n = \log_a(x)$ mit der **Basis** $a \in \mathbb{R}^+ \backslash_{\{1\}}$ und dem **Argument** $x \in \mathbb{R}^+$.

Zu beachten:

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Die **Logarithmengesetze**
Für $a \in \mathbb{R}^+ \backslash_{\{1\}}$; $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}$ gelten:

1. Logarithmengesetz $\quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. Logarithmengesetz $\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. Logarithmengesetz $\quad \log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$

Namenskonventionen:
$\ln(x) = \log_e(x), \quad \lg(x) = \log_{10}(x), \quad \mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen von folgender Form $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad$ bzw. $x^2 + px + q = 0 \quad$ mit den Koeffizienten $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Lösung z. B. über die **p-q-Formel**: $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Der Graph einer **quadratischen Funktion** $\quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine **Parabel**. Ist $a = 1$, spricht man von einer Normalparabel. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

Bezogen auf $f(x) = a(x-d)^2 + e$ (Scheitelpunktform einer **quadratischen Funktion**) bewirkt:
$|a| > 1$: eine Streckung (Verlauf der Parabel ist „steiler“.)
$|a| < 1$: eine Stauchung (Verlauf der Parabel ist „flacher“.)
$d > 0$: eine Verschiebung nach rechts
$d < 0$: eine Verschiebung nach links
$e > 0$: eine Verschiebung nach oben
$e < 0$: eine Verschiebung nach unten

„Besondere" Punkte von Funktionen

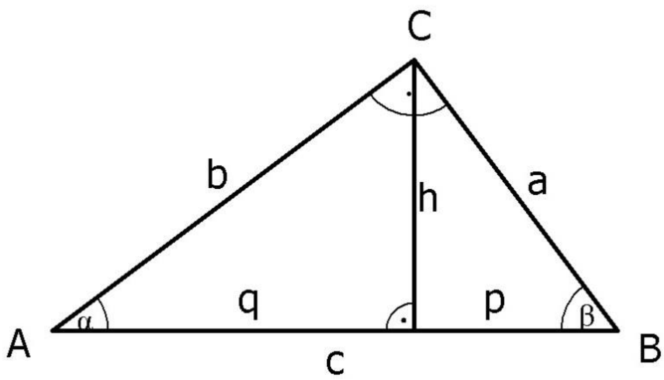
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine **Nullstelle**, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Tiefpunkt**, wenn $f(x_0)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 der kleinste Funktionswert ist.
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Hochpunkt**, wenn $f(x_0)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 der größte Funktionswert ist.
Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Extrempunkt**, wenn $f(x)$ in x_0 einen Tiefpunkt oder einen Hochpunkt hat.

Ungleichungen

Ungleichungen werden im Großen und Ganzen wie Gleichungen gelöst, allerdings muss in einigen Fällen das Vergleichszeichen „umgedreht" werden, z. B. bei der Multiplikation mit negativen Zahlen.

Geometrie am rechtwinkligen Dreieck

Höhe: die Strecke, die rechtwinkelig auf einer Dreiecksseite steht und durch die gegenüberliegende Ecke verläuft, hier: h
Katheten: die Seiten, die an den rechten Winkel angrenzen, hier: a und b
Hypotenuse: die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, hier: c
Hypotenusenabschnitte: die Abschnitte der Hypotenuse, die durch den Schnittpunkt von Höhe und Hypotenuse entstehen, hier: p und q



Satz des Pythagoras: Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten entspricht dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse, hier: $a^2 + b^2 = c^2$.
Höhensatz: Der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Seiten die Hypotenusenabschnitte sind, hier: $h^2 = p \cdot q$.
Kathetensätze: Der Flächeninhalt des Quadrats über einer Kathete entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Seiten die Hypotenuse und der zur Kathete gehörende Hypotenusenabschnitt sind, hier: $a^2 = c \cdot p$ bzw. $b^2 = c \cdot q$.

Umrechnung Gradmaß-Bogenmaß: $\frac{\text{Winkel im Gradmaß}}{\text{Winkel im Bogenmaß}} = \frac{180°}{\pi}$

Winkelsummensatz: Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt $180°$ bzw. π.

Trigonometrie (Bezeichnungen: siehe Dreieck oben)

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ bzw. $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$

Kosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$ bzw. $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$ bzw. $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$
Ankathete eines Winkels: Kathete, die an diesen Winkel angrenzt
Gegenkathete eines Winkels: Kathete, die dem Winkel gegenüberliegt

Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus_{\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
Trigonometrischer Pythagoras: Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Ableitungen

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist (vorausgesetzt die Ableitung existiert, was nicht immer der Fall ist) die Funktion, die die Steigung von $f(x)$ beschreibt.

Ableitungsregeln	Ausgangsfunktion	Ableitung
Konstantenregel ($c \in \mathbb{R}$)	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Faktorregel ($a \in \mathbb{R}$)	$f(x) = a \cdot u(x)$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel ($v(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$)	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel	$f(x) = g\big(h(x)\big)$	$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$

Einige Funktionstypen und ihre Ableitungen

Potenzfunktion	$f(x) = x^n$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \backslash_{\{1\}}$
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N} \backslash_{\{0;1\}}$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$	mit $x \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+ \backslash_{\{1\}}$
Sinusfunktion	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	mit $x \in \mathbb{R}$
Kosinusfunktion	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	mit $x \in \mathbb{R}$
Tangensfunktion	$f(x) = \tan(x)$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	mit $x \in \mathbb{R} \backslash_{\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

Integrale

Gilt $F'(x) = f(x)$, so ist $F(x)$ eine **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$. Die Menge aller Stammfunktionen nennt man **unbestimmtes Integral** und schreibt: $\int f(x)dx = F(x) + c$ mit der Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$.

Bestimmte Integrale von $f(x)$ (zur Bestimmung orientierter Flächeninhalte) berechnet man über die Stammfunktion $F(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Einige Funktionstypen und ihre Stammfunktionen

Potenzfunktion	$f(x) = x^n$ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus_{\{-1\}}$
	$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + c$	mit $x \in \mathbb{R} \setminus_{\{0\}}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$ $F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$	mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus_{\{1\}}$
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $F(x) = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + c$	mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N} \setminus_{\{0;1\}}$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a(x)$ $F(x) = \frac{1}{\ln(a)}(x \ln(x) - x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus_{\{1\}}$
Sinusfunktion	$f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}$
Kosinusfunktion	$f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}$
Tangensfunktion	$f(x) = \tan(x)$ $F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert) + c$	mit $x \in \mathbb{R} \setminus_{\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$

Vektoren

Ein **Vektor** ist ein n-Tupel aus n Komponenten. Ein **Skalar** ist ein Element aus $\mathbb{R}$ (also eine Zahl).

Spaltenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Zeilenvektor: $\vec{a}^T = (a_1; a_2)$ bzw. $\vec{a}^T = (a_1; a_2; a_3)$ (T steht für transponiert.)

Berechnung eines Vektors aus Anfangs- und Endpunkt**:**

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors: $\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Ein Vektor mit Betrag 0 heißt **Nullvektor**.

Addition und **Subtraktion** von Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation (mit $\lambda \in \mathbb{R}$): $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Linearkombination von Vektoren $\overrightarrow{a_i}$ und Skalaren $\lambda_i \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n} \\ \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} + \cdots + \lambda_n a_{3n} \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1; a_2) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1; a_2; a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Alternativ:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren **ist genau dann $\mathbf{0}$**, wenn (mindestens) einer der Vektoren der Nullvektor ist oder die Vektoren einen rechten Winkel einschließen.

Vektorprodukt (nur für Vektoren mit 3 Komponenten):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt (nur für Vektoren mit 3 Komponenten):

$$\vec{a}^T \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R} \}$$

mit a: **Realteil** von z, b: **Imaginärteil** von z und i: **imaginäre Einheit** ($i^2 = -1$)

Darstellung in der gaußschen Zahlenebene

Kartesische Darstellung: $z = a + bi$ oder $z = (a, b)$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} = a - bi$ zur komplexen Zahl $z = a + bi$

Es gilt: $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

Trigonometrische Darstellung (Polarkoordinaten): $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, wobei $\varphi \in [0\,;2\pi[$
mit dem Betrag (über den Satz des Pythagoras): $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
mit dem Argument (mit ein bisschen Trigonometrie): $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (für Zahlen im 1. Quadranten)

Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$, wobei $\varphi \in [0\,;2\pi[$
mit der **eulerschen Formel** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Eulersche Identität: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Rechenregeln

Zur **Addition** und **Subtraktion** komplexer Zahlen benötigt man sie in kartesischer Form. Man addiert / subtrahiert komplexe Zahlen, in dem man ihre Realteile addiert / subtrahiert und ihre Imaginärteile addiert / subtrahiert.

Multiplikation und Division

Es gilt für $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$
bzw. $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad \text{bzw.} \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \text{bzw.} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzen und Wurzeln

Es gilt für $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ bzw. $z = re^{i\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad \text{bzw.} \quad z^n = r^n e^{i\,n\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

mit $k = 0,1,\dots,n-1$

Die erste Wurzel, auf die man stößt, wenn man sich entgegengesetzt des Uhrzeigersinns durch die gaußsche Zahlenebene bewegt, heißt **Hauptwert** und wird meist mit z_0 bezeichnet.

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus_{\{0\}}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ hat **genau** n Lösungen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.