Differenzialrechnung

Skript für den Brückenkurs zum Studiengang Holztechnik

Johannes Creutziger
Hochschule für nachhaltige Entwicklung Eberswalde (FH)
Fachbereich Holztechnik

Version 0.2, 06.10.2011; kleine Korrekturen am 15.01.2013

Zusammenfassung

Dieses Skript ist als Unterlage für den Brückenkurs im Studiengang Holztechnik an der Hochschule für nachhaltige Entwicklung Eberswalde (FH) vorgesehen.

Inhalt

Verwendete Symbole und Bezeichnungen 2

1 Einführung 2
1.1 Vorausgesetzte Kenntnisse und Kompetenzen 2

2 Die Ableitung einer Funktion 4
2.1 Anschauliche Einführung des Begriffs „Ableitung" 4
2.2 Ein Beispiel zur direkten Berechnung der Ableitung 6

3 Die Berechnung von Ableitungen 10
3.1 Die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen 10
3.2 Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen 10
3.2.1 Konstanter Faktor 11
3.2.2 Summen- und Differenzregel 13
3.2.3 Produktregel 14
3.2.4 Quotientenregel 14
3.2.5 Kettenregel 15
3.2.6 Mehrfaches Anwenden der Regeln für eine Funktion 16
3.2.7 Hinweise zum Wegfall von Konstanten 16

4 Schreibweise von Ableitungen mit Differenzialen **17**
4.1 Ableitungen in physikalischen und technischen Zusammenhängen . 18
4.2 Die Kettenregel, ausgedrückt durch Differenziale 19

5 Höhere Ableitungen **20**

Verwendete Symbole und Bezeichnungen

Symbol	Verwendung	Anmerkungen
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$[a,b]$	Abschlossenes Intervall von a bis b	
$[a;b]$	Abschlossenes Intervall (wie voriges)	Semikolon, um Verwechslung mit Dezimalkomma zu vermeiden
$]a,b[$	Offenes Intervall von a bis b	auch mit Semikolon statt Komma möglich
$]a,b]$ $[a,b[$	Halboffenes Intervall von a bis b	auch mit Semikolon statt Komma möglich
(a,b) $(a;b)$	Paar reeller Zahlen (oder anderer Objekte)	mit Semikolon oder Komma möglich
$-\infty$	*minus unendlich*	$-\infty$ ist keine reelle Zahl
∞ $+\infty$	*unendlich* oder *plus enendlich*	∞ ist keine reelle Zahl; $+\infty$ bedeutet dasselbe wie ∞

Tabelle 1: Symbole und Bezeichnungen

Griechische Buchstaben

In Tabelle 2 sind im wesentlichen nur die griechischen Buchstaben aufgeführt, die im Skript vorkommen. Von den hier aufgeführten griechischen Buchstaben wird nur π weitgehend einheitlich für das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser verwendet

1 Einführung

1.1 Vorausgesetzte Kenntnisse und Kompetenzen

Vorausgesetzte Begriffe: Zahlenbereiche, insbesondere reelle Zahlen, Wurzeln, Potenzen, Funktionen (Definitionsbereich, Wertebereich, inverse Funktionen,

Zeichen	Name	Anmerkungen, Beispiele für die Verwendung
α	alpha	Winkel
β	beta	Winkel
γ	gamma	Winkel
δ	delta	Winkel
$\in$	epsilon in der Mengenlehre	Relation „ist Element von”
π	pi	Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser
φ	phi	Winkel
ω	omega	Kreisfrequenz

Tabelle 2: Griechische Buchstaben

Hintereinanderausführung von Funktionen), Umformen von Termen und Ausdrücken.

Fähigkeiten im Umgang mit kartesischen Koordinaten, elementare Geometrie (Kreis, rechtwinkliges Dreieck und Ähnliches).

Fehler im Skript

Sicher sind in dem Skript Fehler enthalten. Für Hinweise auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten bin ich dankbar.

Technische Hinweise

Dieses Skript liegt als Datei im *pdf*-Format vor. Es wird aus einem LaTeX-Quelltext unter Verwendung mehrerer Programme erzeugt. Dabei werden auch die Bilder aus im Quelltext enthaltenen Beschreibungen erzeugt (zunächst als *eps*-Dateien) und in das *pdf*-Dokument eingesetzt.

Die bei der Betrachtung am Bildschirm dunkelblau dargestellten Teile sind Links innerhalb des Dokuments.

Bitte teilen Sie mir technische Probleme oder Wünsche (zum Beispiel nach anderer Schriftgröße, anderen Seitenrändern oder ähnlichem) mit.

Eberswalde, den 15. Januar 2013

Johannes Creutziger

2 Die Ableitung einer Funktion

Es geht hier um die Differenzialrechnung von „normalen" Funktionen, also um reellwertige Funktionen einer reellen Variablen. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist die Menge **R** der reellen Zahlen oder ein wesentlicher zusammenhängender Teil davon, zum Beispiel ein *Intervall* oder die Menge aller *positiven* reellen Zahlen. Der Wertebereich solcher Funktionen besteht auch aus reellen Zahlen. Funktionen mehrerer Variabler werden hier nicht betrachtet.

Der zentrale Begriff der Differenzialrechnung ist die *Ableitung* (oder *Differenzialquotient*).

2.1 Anschauliche Einführung des Begriffs „Ableitung"

Die Funktionen, um die es hier geht, können in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch durch eine „Kurve" dargestellt werden.

Die Differenzialrechnung untersucht das „lokale" Verhalten solcher Funktionen. Die *Ableitung* ist zunächst eine Eigenschaft einer Stelle (eines bestimmten x-Wertes) im Definitionsbereich der Funktion.

Die *Ableitung* einer Funktion f an einem Punkt x_0 in ihrem Definitionsbereich gibt an, wie steil ansteigend oder fallend der Graph an der Stelle x_0 ist. Diese „Steilheit" (auch „Anstieg" genannt) wird wieder durch eine Zahl ausgedrückt, eben die Ableitung von f an der Stelle x_0, symbolisch dargestellt durch $f'(x_0)$.

In Bild 1 ist die übliche Deutung dieses Begriffes „Anstieg" veranschaulicht. Hier ist ein Stück vom Graphen der Funktion $f(x)$ dargestellt, mit einer hervorgehobenen Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich und dem zugehörigen y_0 aus dem Wertebereich. Das heißt, es ist $y_0 = f(x_0)$. Der Punkt mit den Koordinaten $(x_0; y_0)$ liegt auf dem Graphen und ist dort mit einem kleinen Kreis gekennzeichnet. An dieser Stelle soll der der Anstieg der Funktion dargestellt werden.

Da der Anstieg einer *Geraden* leichter dargestellt und berechnet werden kann, wird an dieser Stelle $(x_0; y_0)$ des Funktionsgraphen eine Gerade angelegt, die den Graphen dort „berührt". Eine solche berührende Gerade nennt man *Tangente*. Ersatzweise wird also der Anstieg der Funktion an einem Punkt durch den Anstieg der berührenden Gerade ersetzt. Den Anstieg der Geraden wiederum kann man durch das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ darstellen. Dabei ist Δy der „Höhengewinn" der Tangente, wenn die unabhängige Variable x um Δx vergrößert wird. Im Bild ist das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ etwa 2. Dieser Anstieg wird dann als Anstieg der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0, also als $f'(x_0)$ genommen.

Alternativ könnte man auch den Winkel φ als Maß für den Anstieg der Geraden nehmen (Winkel der Tangente zur positiven x-Achse). Die zwei Arten der Anstiegsmessung hängen über den Tangens beziehungsweise Arkustangens zusammen:

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \varphi$$

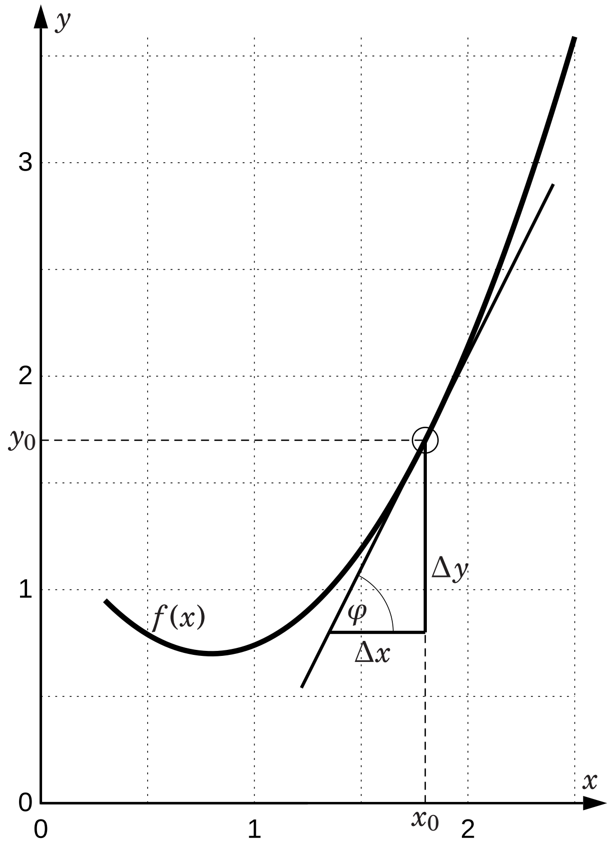

Bild 1: Veranschaulichung der Ableitung

Das übliche Art, den Anstieg auszudrücken, ist das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Das rechtwinklige Dreieck, das dieses Verhältnis veranschaulicht, wird auch *Steigungsdreieck* (oder *Anstiegsdreieck*) genannt.

Zusammengefasst kann man sagen: Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 aus ihrem Definitionsbereich ist der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0. Der Anstieg einer Tangente wiederum ist das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Steigungsdreieck.

Einige Anmerkungen

- Eine Funktion hat typischerweise an verschiedenen Stellen des Definitionsbereichs unterschiedliche Anstiege. Der Anstieg hängt also (mit den Bezeichungen dieses Abschnitts) von x_0 ab.

- Eine Gerade hat dagegen überall den selben Anstieg. Es ist also egal, an welcher Stelle einer Geraden man das Steigungsdreieck betrachtet, und es ist auch egal, wie groß dieses Dreieck ist. Das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ändert sich nicht, wenn man ein anderes Steigungssdreieck an der selben Geraden betrachtet.

- Den „Anstieg" einer fallenden Funktionen stellt man durch negative Zahlen dar. Das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist bei einer fallenden Funktion negativ (Δy ist negativ, bei positivem Δx).

- Die Tangente ist eine Gerade, die man als Graph einer linearen Funktion darstellen kann. Eine lineare Funktion g lässt sich bekanntlich in der Form $g(x) = mx + n$ darstellen. Dabei ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; der Faktor vor dem x in der Funktionsgleichung der linearen Funktion ist also der Anstieg.

  Von einer lineare Funktion kann man natürlich auch die Ableitung berechnen. Da der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist, und eine Tangente an eine Gerade eben diese Gerade ist (überall die selbe), hat eine lineare Funktion überall die selbe Ableitung und zwar überall ihren Anstieg. Wenn $g(x) = mx + n$ die Formel der linearen Funktion ist, hat g überall die Ableitung m.

- Eine Funktion muss nicht überall eine Tangente haben. An Punkte, in denen der Graph einen „Knick" oder einen „Sprung" hat, existiert keine Tangente. Dann kann man auch nicht auf vernünftige Art erklären, was man unter „Anstieg" verstehen will.

- Bei typischen Funktionen kann man an jeder Stelle eine Tangente anlegen und damit überall einen Anstieg, zumindest prinzipiell, erklären. Das heißt, man kann jedem x aus dem Definitionsbereich der Funktion f einen Anstieg an dieser Stelle zuordnen, bezeichnet mit $f'(x)$. Das heißt, die *Ableitung* ist selbst wieder eine Funktion f', nämlich die Zuordnungsvorschrift, die der Zahl x die Zahl $f'(x)$ (Anstieg von f an der Stelle x) zuordnet. Eine Funktion in der Mathematik ist nichts anderes als eine Zuordnungsvorschrift.

- Alle bis hierher vorgebrachten Erklärungen geben noch keine exakte Definition des Begriffs *Ableitung*, und sie geben auch noch keine effektive (praktisch nutzbare) Methode zur Berechnung. Das Problem ist, dass man dazu genau sagen müsste, was man unter der Tangente versteht, und dazu müsste man noch sagen, wie man diese Tangente (oder zumindest ihren Anstieg) berechnen kann. Das Problem wird in der Differenzialrechnung mit einem *Grenzübergang* gelöst, wobei man vom Anstieg von *Sekanten* ausgeht. Der folgende Unterabschnitt 2.2 bringt dazu ein Beispiel.

2.2 Ein Beispiel zur direkten Berechnung der Ableitung

In Bild 2 wird dargestellt, wie man die Ableitung näherungsweise berechnen kann, indem man den Anstieg einer *Sekante* des Graphen betrachtet.

Die Ableitung soll an der Stelle x_0 betrachtet werden, der entsprechende Punkt auf dem Graphen der Funktion ist wieder durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet. Zusätzlich betrachtet man die Stelle $x_0 + h$, wobei h eine „kleine" Zahl ist (nahe 0). Damit ist $x_0 + h$ „in der Nähe" von x_0. Der Punkt mit den Koordinaten $(x_0 + h; f(x_0 + h))$ liegt auf dem Graphen der Kurve, ebenso wie der Punkt $(x_0; f(x_0))$. Im Bild ist wieder ein Steigungsdreieck dargestellt, im Gegensatz zu Bild 1 ist die Hypotenuse des Dreiecks hier eine *Sekante* der Kurve, nicht ein

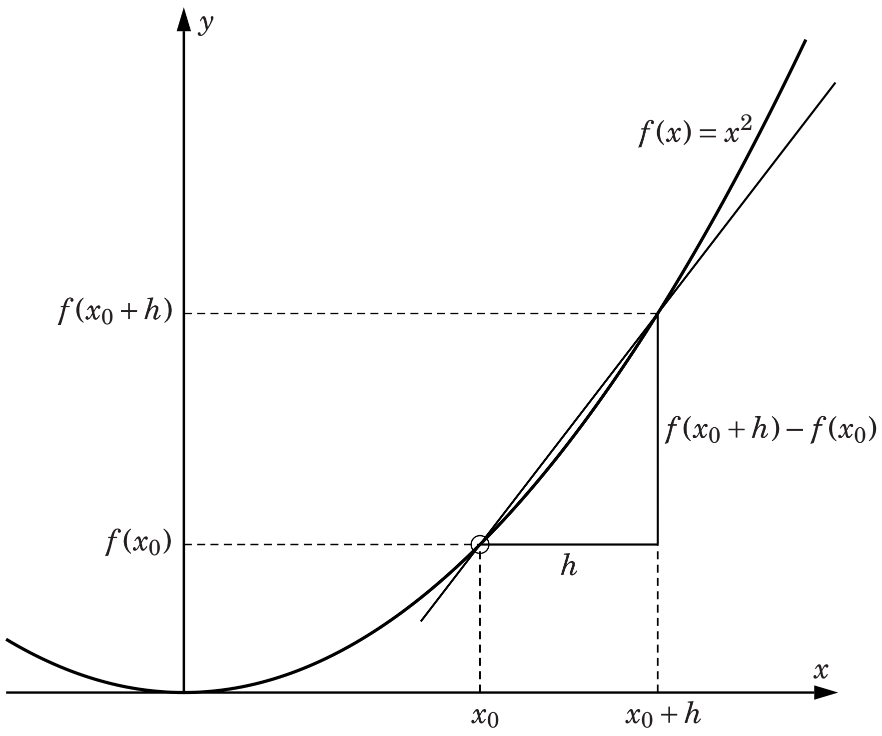

Bild 2: Annäherung der Ableitung durch eine Sekante

Stück der Tangente. Die Sekante ist eine Gerade, die die Kurve an zwei Stellen schneidet.

Die Daten der Steigungsdreiecks lassen sich effektiv berechnen, wenn die Funktion f, die Stelle x_0 und die „kleine" Zahl h bekannt sind. Die horizontale Kathete hat die Länge h und die vertikale Kathete die Länge $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Damit ist der Anstieg der Sekante (Tangens des Anstiegswinkels)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar eine Annährung an den Anstieg der Tangente der Funktion im Punkt x_0. Die Annäherung (Anstieg der Sekante an den Anstieg der Tangente) wird besser, wenn h kleiner wird, denn dann gibt die Sekante besser den lokalen Anstieg im Punkt x_0 wieder.

Für „ganz kleine" sollte h dann der mit Formel (1) berechnete Anstieg der Sekante „genau gleich" dem Anstieg der Tangente sein. Diese Formulierung ist natürlich nicht mathematisch exakt. Der exakte Weg erfordert weiter gehende mathematische Grundlagen, insbesondere den Begriff „Grenzwert".

Einige Anmerkungen und Ergänzungen für die, die mehr wissen wollen

- Man kann in Formel (1) nicht $h = 0$ setzen, denn dann müsste man ja durch 0 dividieren.

- Die formale Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{2}$$

  In Worten etwa so: Der Grenzwert des Anstiegs der Sekante (für h gegen 0) ist die Ableitung der Funktion. Dabei bleibt der eine Punkt im Definitonsbereich (x_0) fest, die Sekante wird für x_0 und x_0+h gebildet. Beim Grenzwert für h gegen 0 kann h beliebig nahe an Null herankommen, aber nie gleich 0 werden.

- In Bezug auf die vorangegangene Definition können die folgenden Fragen aufkommen: *Ist der Grenzwert des Sekantenanstiegs wirklich der Anstieg der Tangente?* und: *Was geschieht, wenn der Grenzwert nicht existiert?* Die mathematischen Antworten sind: Die Tangente wird mit Hilfe der Ableitung *definiert*, das heißt, die Tangente am Funktionsgraphen von f in x_0 *ist* die Gerade, die durch den Punkt $(x_0; f(x_0))$ geht und den Anstieg $f'(x_0)$ hat. Die Antwort auf die zweite Frage lautet: Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann gibt es keine Ableitung und damit keine Anstieg der Tangente, und daher gibt es dann eben keine Tangente. Wenn für eine Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich einer Funktion f der Grenzwert des Sekantenanstiegs nicht existiert, dann sagt man, die Funktion ist in x_0 *nicht differenzierbar*.

- Der letzte Punkt mag vielleicht verwunderlich erscheinen, aber es ist tatsächlich so, dass eine Funktion nicht überall eine Ableitung haben muss. An solchen Stellen ohne Ableitung hat sie dann auch keine Tangente. Der Begriff „Tangente" erscheint vielleicht unmittelbar klar (im Gegensatz zu *Ableitung*), aber eine genauere Analyse zeigt, dass man bei allgemeinen Funktionsgraphen nicht einfach ohne Benutzung der Differenzialrechnung sagen kann, was eine Tangente ist. Im Bild 3 ist der Graph der Betragsfunktion gezeigt, der an der Stelle 0 keine Tangente hat.

Ein volles formales Verständnis des Begrifs *Ableitung* setzt ein Verstehen des Begriffs *Grenzwert* (oder *Limes*) voraus. Die folgende Rechung sollte aber auch sonst verständlich sein.

Es sei $f(x) = x^2$, $x_0 = 0{,}5$ und h sei zunächst gleich 0,3. Diese Daten liegen dem Bild 2 zugrunde. Es geht also um die näherungsweise Berechnung des Anstiegs der Tangente an der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0{,}5$ durch Rechnung mit der Sekante an den Stellen 0,5 und 0,8. Dann ist

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(0{,}5+0{,}3)-f(0{,}5)}{0{,}3} = \frac{(0{,}5+0{,}3)^2-0{,}5^2}{0{,}3} = \frac{0{,}64-0{,}25}{0{,}3} = 1{,}3$$

Der gesuchte Tangentenanstieg ist also näherungsweise gleich 1,3.

Die Rechnung kann man auch mit einem variablen h durchführen. Man denke sich h als eine „kleine" Zahl (nahe 0), die Funktion f und $x_0 = 0{,}5$ seien unverändert. Im Bild 2 bedeutet das, dass die Kurve der Funktion f und die Stelle x_0

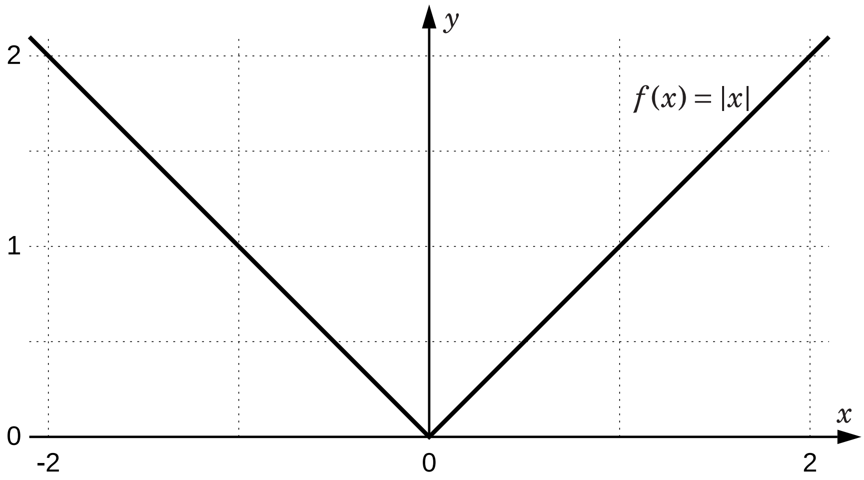

Bild 3: Die Betragsfunktion (eine Funktion ohne Ableitung an der Stelle 0)

unverändert bleiben, aber h sich verändern kann. Der zweite Schnittpunkt der Sekante mit der Kurve kann sich verschieben, insbesondere kann er näher an den Punkt $(x_0; f(x_0))$, hier also $(0{,}5; 0{,}25)$, heranrücken.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h} = \frac{(0{,}5+h)^2-0{,}5^2}{h} \\ = \frac{0{,}5^2+2\cdot 0{,}5h+h^2-0{,}5^2}{h} &= \frac{h+h^2}{h} = 1+h \end{aligned}$$

Man erhält zunächst wieder den Wert 1,3 als Anstieg der Sekante, wenn man $h = 0{,}3$ setzt. Wichtiger ist, dass diese Rechnung für beliebige $h \neq 0$ möglich ist. Auch ohne formales Verständnis der Grenzwertdefinition sollte klar sein, dass der hier gefundene Ausdruck für den Sekantenanstieg (nämlich $1+h$) gegen 1 konvergiert, wenn h gegen 0 konvergiert.

Zusammengefasst heißt das: die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0{,}5$ ist 1. Symbolisch: $f'(0{,}5) = 1$.

Der nächste Verallgemeinerungsschritt besteht nun darin, die Rechnung nicht nur für variables h, sondern auch für ein beliebiges x_0 durchzuführen (aber weiter für die selbe Funktion $f(x) = x^2$). Das ist gar nicht viel schwieriger:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} \\ = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} &= \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0+h \end{aligned}$$

Um die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an einer Stelle x_0 zu berechnen, hält man dieses x_0 fest und lässt „h gegen Null gehen”. Der zugehörige Sekantenanstieg ist, wie die letzte Rechnung zeigt, $2x_0+h$. Wenn hier h gegen Null geht, geht der Sekantenanstieg offenbar gegen $2x_0$. Dieser Grenzwert ist die Ableitung.

Zusammengefasst: Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist $2x_0$, symbolisch $f'(x_0) = 2x_0$. Wenn man diese Aussage für sich betrachtet, kann man statt x_0 auch einfach x schreiben: $f'(x) = 2x$. Betrachtet man diese Zuordnungsvorschrift: Für ein beliebiges reelles x ist die Ableitung $f'(x)$ gleich $2x$, so sieht man, dass f' wieder eine Funktion ist, nämlich die Funktion, die x auf $2x$ abbildet.

3 Die Berechnung von Ableitungen

Die Rechnung im Unterabschnitt 2.2 ist nicht auf beliebige Funktionen übertragbar, gegebenenfalls werden schwierigere mathematische Erkenntnisse gebraucht. Außerdem ist diese Rechnung ein bisschen mühsam, jedenfalls wenn man bedenkt, dass das Berechnen von Ableitungen in manchen mathematischen Anwendungsgebieten eine ziemlich alltägliche Aufgabe ist.

Wünschenswert sind daher einfach handhabbare Regeln zum Berechnen der Ableitungen von beliebigen gegebenen Funktionen. Solche Regeln gibt es. Sie bestehen aus zwei Gruppen: Regeln für die Ableitungen von bestimmten wichtigen Funktionen („Grundfunktionen"), und Regeln für die Berechnung von Ableitungen für Funktionen, die aus den „Grundfunktionen" oder anderen einfacheren Funktionen zusammengesetzt sind.

3.1 Die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

Aus Tabelle 3 kann man zum Beispiel entnehmen, dass für die Ableitung der Funktion $f(x) = x^5$ gilt: $f'(x) = 5x^4$. Die Funktion passt nämlich in das Schema x^a. Daher muss man in der entsprechenden Zeile der Tabelle $a = 5$ setzen.

Die Regel für x^a funktioniert auch für negative Konstanten a. Zum Beispiel kann man, wenn man die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ berechnen will, $a = -2$ setzen. Dann ist $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} = x^a$ und damit $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$.

Die selbe Regel ist auch auf die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ anwendbar (für $x > 0$). Denn hier ist mit $a = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^a$$

und daher

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Anmerkung: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auch für $x = 0$ definiert, die eben gefundene Formel für die Ableitung gilt aber nur für $x > 0$ (im Falle $x = 0$ müsste man durch Null dividieren). In der Tat ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

3.2 Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen

Aus einfachen Funktionen kann man durch die arithmetischen Operationen und Verkettung von Funktionen neue Funktionen bilden. Hier geht es um die Ablei-

$f(x)$	$f'(x)$	**Anmerkungen**
c	0	Die Ableitung einer Konstanten ist 0
$c \cdot x$	c	
x^a	ax^{a-1}	Gilt für ganzzahlige (auch negative) $a \neq 0$ Gilt auch für nichtganzzahlige a, wenn $x > 0$ ist.
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+(\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$	
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	Gilt für $x \neq 0$. Betragsstriche bei ln |x| sind nötig für $x < 0$
e^x	e^x	
a^x	$(\ln a)\, a^x$	$a > 0$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Tabelle 3: Ableitungen einiger wichtiger Funktion

tungen solcher zusammengesetzter Funktionen. Einfache Arten der Zusammensetzung ist die Addition oder Multiplikation von zwei Funktionen.

Es seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen. Dann wird die Funktion f, die durch die Formel

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

definiert ist, *Summe* der Funktionen u und v genannt. Wenn die Funktionen u und v bekannte Ableitungen haben, kann die Ableitung von f leicht erschlossen werden (siehe folgenden Unterabschnitt).

Bei genauer Betrachtung ist die Situation etwas komplexer. Zunächst muss man prüfen, was die Definitonsbereiche von u und v sind. Die Funktion f ist nur dort definiert, wo sowohl u als auch v definiert sind (mengentheoretisch ausgedrückt: Der Definitionsbereich von f ist die Schnittmenge der Definitionsbereiche von u und v). Für x aus dem Definitionsbereich von f ist dann $f(x)$ definiert durch

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

Analog lassen sich Differenz, Produkt und Quotient von zwei Funktionen erklären.

3.2.1 Konstanter Faktor

Die Funktion u sei gegeben, c sei eine beliebige (konstante) reelle Zahl, und es sei $f(x) = c \cdot u(x)$. Dann ist auch f überall dort differenzierbar, wo u differenzierbar ist, und es gilt

$$f'(x) = c \cdot u'(x)$$

In Kurform schreibt man

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

Beispiel

Es sei $u(x) = \sin x$ und $c = 2$. Die Funktion f sei definiert duch $f(x) = c \cdot u(x) = c \sin x$. Dann ist

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = c \cos x = 2 \cos x$$

Das funktioniert genau so mit jedem anderen Wert der Konstante c.

Die Regel „Konstanter Faktor" funktioniert natürlich auch mit einem konstanten Quotienten. Zum Beispiel ist die Ableitung von

$$v(x) = \frac{\sin x}{3}$$

gegeben durch

$$v'(x) = \frac{\cos x}{3}$$

Das gilt ganz einfach deshalb, weil man die Division durch eine Konstante auch als Produkt mit dem (dann ebenfalls konstanten) reziproken Wert $\frac{1}{c}$ schreiben kann:

$$\frac{\sin x}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sin x$$

Jetzt ist $\frac{1}{3}$ ein konstanter Faktor, daher kann die Regel für den konstanten Faktor beim Differenzieren angewendet werden.

Ebenso ist jeder Audruck in einer Funktionsdefinition konstant, der nicht von der unabhängigen Variablen abhängt.

Es sei zum Beispiel

$$f(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot \sin x \tag{3}$$

Hier ist der Faktor $\sqrt{\frac{2a}{\pi}}$ konstant, daher gilt für die Ableitung dieser Funktion

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot \cos x$$

Das gilt für jeden Wert der Konstante a.

Die Situation ist anders, wenn a von der unabhängigen Variable x abhängt. Das müsste dann aber in der Definition der Funktion (3) klar ausgedrückt werden.

3.2.2 Summen- und Differenzregel

Die Funktionen u und v seien gegeben, die Ableitungen seien wie üblich mit u' beziehungsweise v' bezeichnet. Dann hat die durch $f(x) = u(x) + v(x)$ definierte Funktionen die Ableitung

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Das gilt für alle x, an denen u und v definiert sind und Ableitungen haben. Man kann die letzte Formel kurz so schreiben:

$$(u+v)' = u' + v'$$

In Worten etwa so: Die Ableitung der Summe von zwei Funktionen ist die Summe der Ableitungen der beiden Funktionen.

Die Formel lässt sich auch auf mehr als zwei Summanden übertragen.

Für gegebene Funktionen u und v lässt sich auch die *Differenz* bilden, deren Ableitung ist die Differenz der Ableitungen von u und v:

$$(u-v)' = u' - v'$$

Beispiel 1
Es sei

$$u(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

und es seien f und g als Summe beziehungsweise Differenzen dieser Funktionen definiert:

$$f(x) = u(x) + v(x) = x^2 + \sin x \qquad \text{und} \qquad g(x) = u(x) - v(x) = x^2 - \sin x$$

Dann gilt (siehe Tabelle 3)

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + \cos x$$

und

$$g'(x) = u'(x) - v'(x) = 2x - \cos x$$

Beispiel 2
Jetzt sei

$$u(x) = \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad v(x) = \frac{1}{x-1}$$

Hier gibt es Einschränkungen beim Definitionsbereich. Die Funktion u ist nur für $x \geq 0$ definiert, und nur für $x > 0$ differenzierbar. Die Funktion v ist für $x = 1$ nicht definiert. Die Funktion

$$f(x) = u(x) + v(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$$

ist daher nur definiert und differenzierbar für $x > 0$ und $x \neq 1$. Für solche x gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Siehe Abschnitt 3.1. Die Begründung für die Ableitung von $\frac{1}{x-1}$ folgt später.

3.2.3 Produktregel

Die Funktionen u und v seien gegeben. Dann hat die durch $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ definierte Funktionen f die Ableitung

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Das gilt für alle x, an denen u und v definiert sind und Ableitungen haben (differenzierbar sind).

Die Regel kann man kurz so schreiben:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Beispiel

Es sei wieder

$$u(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

und es sei

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 \cdot \sin x$$

Dann ist

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

3.2.4 Quotientenregel

Die Funktionen u und v seien gegeben. Dann hat die durch

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

definierte Funktionen f die Ableitung

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$$

Das gilt für alle x, an denen u und v definiert sind und Ableitungen haben (differenzierbar sind) *und* $v(x) \neq 0$ *ist*.

Die Regel kann man kurz so schreiben:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Beispiel

Es sei wieder

$$u(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

und es sei

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{\sin x}$$

Dann ist

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$$

3.2.5 Kettenregel

Es seien wieder u und v gegeben, und f sei definiert mit der Formel

$$f(x) = u(v(x))$$

Die Funktion f nennt man die *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung* von u und v: Für ein gegebenes x wird zuerst $v(x)$ berechnet, das Ergebnis ist wieder eine Zahl, und auf diese Zahl wird u angewendet, das Ergebnis ist $u(v(x))$ („u von v von x"). Diese Zuordnung „x wird abgebildet auf $u(v(x))$" ist natürlich wieder eine Funktion, die hier mit f bezeichnet wird.

In diesem Zusammenhang nennt man u die *äußere* und v die *innere* Funktion. Die Ableitung von u ist die *äußere Ableitung*, und die Ableitung von v ist die *innere Ableitung*.

Die Regel für die Ableitung der Funktion $f(x) = u(v(x))$ heißt *Kettenregel*, sie lautet

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Der Term $u'(v(x))$ bedeutet: Man berechnet die Ableitung der äußeren Funktion (hier u) und setzt in diese Ableitung $v(x)$ anstelle von x ein.

Das Ergebnis der Verkettung hängt von der Reihenfolge ab:

$$u(v(x)) \qquad \text{ist im allgemeinen etwas anderes als} \qquad v(u(x))$$

Oft hat man in Zusammenhang mit der Verkettung nicht die Aufgabe, eine verkettete Funktion aus zwei gegebenen Funktionen zu berechnen, sondern umgekehrt, eine gegebene Funktion als Verkettung von zwei einfacherern Funktionen zu erkennen. Das ist typisch bei der Anwendung der Kettenregel.

Beispiel

Es sei wieder $u(x) = x^2$ und $v(x) = \sin x$. Sei f die Verkettung. Dann ist

$$f(x) = u(v(x)) = (\sin x)^2$$

In Worten ausgedrückt, ergibt sich die Funktion f folgendermaßen: Für ein gegebenes x berechne man zunächst $\sin x$, von dieser Zahl berechne man das Quadrat (das heißt, man wende die Funktion u an).

Die Kettenregel liefert die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \tag{4}$$

Die äußere Funktion ist $u(x) = x^2$, deren Ableitung ist $u'(x) = 2x$. In diesen Ausdruck für die Ableitung setzt man die innere Funktion, also $\sin x$, für x ein und erhält $2\sin x$. Diesen Term muss man mit der Ableitung der inneren Funktion, also mit der Ableitung von $\sin x$, multiplizieren. Diese Ableitung ist $\cos x$. Daraus erhält man die Formel 4.

3.2.6 Mehrfaches Anwenden der Regeln für eine Funktion

Oft ist es nötig, zum Berechnen der Ableitung einer Funktion eine Regel mehrfach anzuwenden oder mehrere Regeln anzuwenden.

Es sei zum Beispiel die Funktion $f(x) = (\sin(2x))^2$ zu differenzieren. Man kann die Funktion als Verkettung von

$$u(x) = x^2$$

und

$$v(x) = \sin(2x)$$

ansehen, denn es ist mit diesen Vereinbarungen

$$f(x) = u(v(x))$$

Man kann also die Kettenregel anwenden. Als Teilaufgabe muss dazu die „innere Ableitung”, also die Ableitung von $v(x)$ gefunden werden. Dazu braucht man wieder die Kettenregel, denn $v(x)$ ist, für sich betrachtet, auch eine zusammengesetzte Funktion (Verkettung der Funktionen „sin” und „Multiplikation mit 2”). Insgesamt erhält man als Ableitung von f

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = 2 \cdot \sin(2x) \cdot v'(x) = 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)$$

3.2.7 Hinweise zum Wegfall von Konstanten

Konstante Summanden auf der obersten Ebene fallen beim Differenzieren weg: Die Ableitung von

$$f(x) = u(x) + c$$

ist

$$f'(x) = u'(x)$$

wenn c eine Konstante ist. Konstanten an anderen Stellen fallen typischerweise nicht weg: Die Ableitung von

$$f(x) = u(b \cdot x + c)$$

ist zum Beispiel

$$f'(x) = b \cdot u'(b \cdot x + c)$$

(für Konstanten b und c; das folgt aus der Kettenregel). Insbesondere ist für

$$f(x) = u(x + c)$$

die Ableitung

$$f'(x) = u'(x + c)$$

Der konstante Summand bleibt hier also erhalten. Konstante Faktoren vor Funktionen bleiben auch erhalten.

Einige konkrete Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x + 5$	$\cos x$
$\sin(x+5)$	$\cos(x+5)$
$5 \cdot \sin x$	$5 \cdot \cos x$
$\sin(3 \cdot x + 5)$	$3 \cdot \cos(3 \cdot x + 5)$

Tabelle 4: Ableitungen (Beispiele)

4 Schreibweise von Ableitungen mit Differenzialen

Anstelle der Schreibweise $f'(x)$ für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x wird auch eine Schreibweise mit „Differenzialen” verwendet. Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 kann in der Differenzialschreibweise so aussehen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0) \qquad \text{oder} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \tag{5}$$

Der Bruchstrich in dieser Schreibweise ist dabei nicht als *durch*, sondern als *nach* zu lesen, also zum Beispiel „d f *nach* d x . . . ”. Es handelt sich nicht um eine Division.

Ebenso ist die Kombination df *keine Multiplikation* von d und f, sondern eher zu sehen als *Differenzial* f (man spricht aber nur „d f”).

Die rechte Variante in (5) liest man etwa so: „d f von x nach d x an der Stelle x gleich x null”.

Anstelle von $f(x)$ kann auch ein Formelausdruck stehen, der zur Berechnung von $f(x)$ verwendet wird. Wenn also $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ist, kann man schreiben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + 2x + 3\right) = 2x + 2$$

Rechts steht hier ein Ausdruck für die Ableitung der Funktion f. Dieser Ausdruck folgt aus den Ableitungsregeln, siehe Abschnitt 3.

In der Schreibweise mit einem Strich für die Ableitung sieht die selbe Aussage so aus:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

In Zusammenhang mit der Differenzialschreibweise wird oft ein spezielles Symbol für die abhängige Variable verwendet. In allgemeinen Betrachtungen ist das häufig y. Man schreibt dann zum Beispiel

$$y = f(x)$$

und für die Ableitung an der Stelle x_0

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \tag{6}$$

Das, was hier wie ein Bruch aussieht, kann man verstehen als *Grenzwert der Differenzenquotionten* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Wenn Δx immer kleiner wird, wird auch Δy immer kleiner, und das Verhältnis konvergiert gegen einen festen Wert, der als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bezeichnet wird.

In diesem Sinne ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zwar kein Quotient (Ergebnis einer Division), aber immerhin ein Grenzwert von Quotienten. Die Ableitung ist also ein Grenzwert von Differenzenquotienten und wird daher auch als *Differenzialquotient* bezeichnet.

In der Schreibweise (6) kann man den Zusatz „an der Stelle $x = x_0$" weglassen, wenn es um Formelausdrücke für die Ableitung geht. Dann ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gewissermaßen eine andere Schreibweise für $f'(x)$. In einem Beispiel sieht das so aus:

Es ist

$$y = x^2 + 2x + 3$$

und daher

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + 2$$

4.1 Ableitungen in physikalischen und technischen Zusammenhängen

Die Größen, die in physikalischen und technischen Zusammenhängen auftreten, haben oft bestimmte Maßeinheiten, und sie werden meist mit bestimmten, mehr oder weniger fest stehenden Symbolen bezeichnet. Dabei wird oft eine Größe als „abhängig" von einer (oder auch mehreren) anderen Größe(n) gesehen, das heißt, mathematisch gesehen gibt eine Funktion den Zusammenhang an. Dabei wird oft kein spezielles Symbol für die Funktion verwendet, sondern einfach das Symbol für die abhängige Größe verwendet. Zum Beispiel beschreibt die Formel

$$s = \frac{a}{2}t^2$$

die Abhängigkeit des Weges s von der Zeit t bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit v, und den Zusammenhang schreibt man so:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$$

Um die Abhängigkeit von der Zeit symbolisch auszudrücken, schreibt man auch

$$s = s(t) = \frac{a}{2}t^2$$

und

$$v = v(t) = at$$

Die abhängige Größen (hier s und v) werden genau so bezeichnet wie die Funktionen, die die Abhängigkeit dieser Größen von der Zeit beschreiben.

Die Maßeinheit einer Größe, die durch Differenzieren berechnet wird, ist die Maßeinheit der differenzierten Größe, dividiert durch die Maßeinheit der unabhängigen Variablen.

Weil der Weg s die Maßeinheit [m] (Meter) und die Zeit t die Maßeinheit [s] (Sekunden) hat, ist die Maßeinheit der Geschwindigkeit [m/s] (Meter pro Sekunde). Die Maßeinheit der Ableitung ist also so, als ob

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

tatsächlich ein Bruch wäre.

4.2 Die Kettenregel, ausgedrückt durch Differenziale

Die Kettenregel kann man besonders einleuchtend schreiben, wenn man Funktionen mit abhängigen Variablen identifiziert und Differenziale verwendet.

Sei zum Beispiel wieder

$$u(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

Die Zusammenhänge werden aber jetzt durch spezielle Variable ausgedrückt:

$$z = y^2 \qquad \text{und} \qquad y = \sin x$$

Wir gehen also davon aus, dass die variable Größe y von der Variablen x abhängt, gemäß der Regel $y = \sin x$. Weiterhin wird die Variable z als abhängig von y betrachtet, gemäß $z = y^2$. Dann ist

$$z = y^2 = (\sin x)^2$$

und außerdem gilt für die Ableitungen in Differenzialschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 2y \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

Gesucht ist die Ableitung von $z = (\sin x)^2$, also $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. Die Kettenregel in Differenzialform sagt:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Das sieht wie eine Gleichung mit Brüchen aus (es sieht so aus, als ob man auf der rechten Seite $\mathrm{d}y$ „herauskürzen” könnte, um die linke Seite zu erhalten). Natürlich geht es hier nicht um „richtige” Brüche, aber immerhin kann man sich die Formel so gut merken.

Wendet man die Kettenregel in Differenzialform an und verwendet dabei die eben gewonnenen Ausdrücke für $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung erhält man aus dem Ausdruck in der Mitte, indem man für y durch $\sin x$ ersetzt. Das kann man tun, denn es war vorausgesetzt, dass y von x abhängt gemäß der Formel $y = \sin x$.

Die gefundene Ableitung stimmt natürlich mit dem schon in Abschnitt 3.2.5 gefundenen Ausdruck überein, siehe Formel 4.

5 Höhere Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion ist (nicht immer, aber in typischen Fällen) wieder eine Funktion, von der man die Ableitung bilden kann.

Die Ableitung einer Funktion f ist f', was wieder eine Funktion ist. Die Ableitung von f' wird mit f'' bezeichnet. Das ist auch wieder eine Funktion, sie wird als *zweite Ableitung* von f bezeichnet, oder als *Ableitung zweiter Ordnung*. Die zweite Ableitung von f ist also die Ableitung der Ableitung von f.

Die Regeln zur Bildung der zweiten Ableitung sind genau die selben, die man auch bei der Bildung der (normalen) Ableitung anwendet.

Es sei zum Beispiel $f(x) = x^2 + \sin x$. Für die Ableitung dieser Funktion gilt:

$$f'(x) = 2x + \cos x$$

Diese Funktion (f') kann wieder differenziert werden, man erhält die zweite Ableitung f''. Für die hier gewählte Funktion f ist

$$f''(x) = 2 - \sin x$$

Analog kann man auch die dritte, vierte oder noch höhere Ableitungen bilden; diese kann man mit f''', f'''', ... bezeichnen. Die Zahl der Striche ist die Ordnung der Ableitung. Allerdings sollte man spätestens nach der vierten Ableitung zu der Bezeichnung $f^{(n)}$ für die n-te Ableitung übergehen. Eine hochgestellte Zahl in Klammern hinter einem Funktionssymbol bezeichnet die Ableitung der entsprechenden Ordnung. So ist $f^{(5)}$ die fünfte Ableitung von f.

Um die „normale" Ableitung sprachlich klar von den höheren Ableitungen zu unterscheiden, nennt man sie in diesem Zusammenhang *erste Ableitung*.

Die zweite Ableitung verwendet man zum Beispiel in der Kinematik (Bewegungslehre). Wenn $s(t)$ die Funktion ist, die den Ort eines Körpers als Funktion der Zeit beschreibt, ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers und $s''(t)$ seine *Beschleunigung*.