Trigonometrische Funktionen und inverse trigonometrische Funktionen

Skript für den Brückenkurs zum Studiengang Holztechnik

Johannes Creutziger
Hochschule für nachhaltige Entwicklung Eberswalde (FH)
Fachbereich Holztechnik

Version 0.3, 28.09.2011; kleine Korrekturen am 15.01.2013

Zusammenfassung

Dieses Skript ist als Unterlage für den Brückenkurs im Studiengang Holztechnik an der Hochschule für nachhaltige Entwicklung Eberswalde (FH) vorgesehen.

Inhalt

Verwendete Symbole und Bezeichnungen 2

1 Einführung 3
1.1 Vorausgesetzte Kenntnisse und Kompetenzen 3

2 Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) 3
2.1 Winkel 4
2.2 Sinus- und Kosinusfunktion 6
2.2.1 Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck 6
2.2.2 Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis 7
2.2.3 Einige Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion . . 10
2.2.4 Sinusförmige Funktionen 11
2.3 Die Tangensfunktion 12
2.3.1 Definition der Tangensfunktion durch Sinus und Kosinus . . 12
2.3.2 Die Tangensfunktion am rechtwinkligen Dreieck 13

3 Inverse trigonometrische Funktionen 14
3.1 Der Arkussinus 14
3.2 Der Arkustangens 15

Verwendete Symbole und Bezeichnungen

Symbol	Verwendung	Anmerkungen
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$[a,b]$	Abschlossenes Intervall von a bis b	
$[a;b]$	Abschlossenes Intervall (wie voriges)	Semikolon, um Verwechslung mit Dezimalkomma zu vermeiden
$]a,b[$	Offenes Intervall von a bis b	auch mit Semikolon statt Komma möglich
$]a,b]$ $[a,b[$	Halboffenes Intervall von a bis b	auch mit Semikolon statt Komma möglich
(a,b) $(a;b)$	Paar reeller Zahlen (oder anderer Objekte)	mit Semikolon oder Komma möglich
$-\infty$	*minus unendlich*	$-\infty$ ist keine reelle Zahl
∞ $+\infty$	*unendlich* oder *plus enendlich*	∞ ist keine reelle Zahl; $+\infty$ bedeutet dasselbe wie ∞

Tabelle 1: Symbole und Bezeichnungen

Griechische Buchstaben

Zeichen	Name	Anmerkungen, Beispiele für die Verwendung
α	alpha	Winkel
β	beta	Winkel
γ	gamma	Winkel
δ	delta	Winkel
$\in$	epsilon in der Mengenlehre	Relation „ist Element von”
π	pi	Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser
φ	phi	Winkel
ω	omega	Kreisfrequenz

Tabelle 2: Griechische Buchstaben

In Tabelle 2 sind im wesentlichen nur die griechischen Buchstaben aufgeführt, die im Skript vorkommen. Von den hier aufgeführten griechischen Buchstaben wird nur π weitgehend einheitlich für das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser verwendet

1 Einführung

1.1 Vorausgesetzte Kenntnisse und Kompetenzen

Vorausgesetzte Begriffe: Zahlenbereiche, insbesondere reelle Zahlen, Wurzeln, Potenzen, Funktionen, Definitionsbereich, Wertebereich, inverse Funktionen.

Fähigkeiten im Umgang mit kartesischen Koordinaten, elementare Geometrie (Kreis, rechtwinkliges Dreieck und Ähnliches).

Fehler im Skript

Sicher sind in dem Skript Fehler enthalten. Für Hinweise auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten bin ich dankbar.

Technische Hinweise

Dieses Skript liegt als Datei im *pdf*-Format vor. Es wird aus einem LaTeX-Quelltext unter Verwendung mehrerer Programme erzeugt. Dabei werden auch die Bilder aus im Quelltext enthaltenen Beschreibungen erzeugt (zunächst als *eps*-Dateien) und in das *pdf*-Dokument eingesetzt.

Die bei der Betrachtung am Bildschirm dunkelblau dargestellten Teile sind Links innerhalb des Dokuments.

Bitte teilen Sie mir technische Probleme oder Wünsche (zum Beispiel nach anderer Schriftgröße, anderen Seitenrändern oder ähnlichem) mit.

Eberswalde, den 15. Januar 2013

Johannes Creutziger

2 Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) sind Funktionen, deren Definitionsbereiche Mengen von reellen Zahlen sind, die als *Winkelgrößen* anzusehen sind.

Die Funktionswerte von trigonometrischen Funktionen sind wieder reelle Zahlen, die sich oft als Verhältnisse von Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck ansehen lassen.

Durch eine Winkelfunktion wird also jedem Winkelwert (eventuell mit einigen Ausnahmen, zum Beispiel beim *Tangens*) eine reelle Zahl zugeordnet.

Die wichtigsten Winkelfunktionen sind die Sinusfunktion (sin), die Kosinusfunktion (cos) und die Tangensfunktion (tan).

Zum Beispiel ist $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$. Dem Winkel der Größe $\frac{\pi}{6}$ wird durch die Sinusfunktion die Zahl 0,5 zugeordnet. Der Winkel ist hier in Bogenmaß angegeben. Möglich ist auch die Angabe in Gradmaß. Der Winkelgröße $\frac{\pi}{6}$ entspricht im Gradmaß der Wert 30°.

2.1 Winkel

Einige wichtige Fakten zum Begriff „Winkel" (keine formale Definition).

- Ein Winkel besteht zwischen zwei Strahlen (Halbgeraden), die von einem Punkt ausgehen.
- Winkel entstehen am Schnittpunkt von zwei Geraden (oder geraden Strecken)
- Man kann die *Größe* von Winkeln angeben. Dazu werden verschiedene „Maßeinheiten" verwendet, zum Beispiel *Grad* und *Bogenmaß* (*Radiant*). Sprachlich wird „Winkel" nicht immer klar von „Winkelgröße" unterschieden.
- Winkelgrößen sind auch Maße für *Drehungen* (wie weit muss man den ersten Strahl um den gemeinesamen Ausgangspunkt drehen, damit er auf dem zweiten liegt?).
- Nebeneinander liegende Winkel lassen sich addieren, die Summe der Winkelgrößen ist die Größe des „zusammengesetzten" Winkels. Das passt gut zu der Erklärung mit der Drehung: Drehung um einen Winkel α und danach um einen Winkel β bedeutet das selbe wie die Drehung um den Winkel $\alpha+\beta$.
- Drehungen, und die entsprechenden Winkel, können auch *negativ* sein, das heißt, entgegengesetzt gerichtet sein. Dabei ist die Festlegung der Richtung, die als *positiv* zählen soll, letztlich willkürlich. Es ist aber üblich, die Drehung *entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn* als positiv anzusehen.

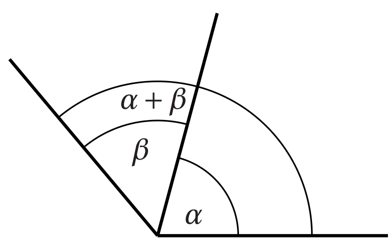

Bild 1: Winkel in der Ebene

Einige wichtige mathematische Aussagen zu Winkeln.

- Der Vollwinkel hat die Größe 360° (Grad) oder 2π (rad, also Bogenmaß).
- Der gestreckte Winkel hat die Größe 180° (Grad) oder π (rad).
- Der rechte Winkel hat die Größe 90° (Grad) oder $\frac{\pi}{2}$ (rad).
- Die Winkelsumme im Dreieck (genauer gesagt: Die Summe der Innenwinkel) ist 180° oder π (rad). Beim Viereck sind es 360° oder 2π (rad)

Die Größe von Winkeln ist dimensionslos, wenn man das Bogenmaß verwendet. Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis von Bogenlänge zum Radius. Das ist im Bild 2 dargestellt. Der Winkel α hat die Größe (im Bogenmaß) $\frac{b}{r}$. Der Bogen der Länge b ist das Stück des Kreises mit dem Mittelpunkt P (dem Scheitelpunkt des Winkels), der zwischen den beiden Strahlen liegt. Es ist egal, wie groß der dabei verwendete Radius ist. Das Verhältnis von Bogenlänge und zugehörigem Radius ist bei einem bestimmten Winkel immer dasselbe.

Man kann „rad" hinter eine Winkel in Bogenmaß schreiben, wenn man sonst Missverständnisse befürchtet.

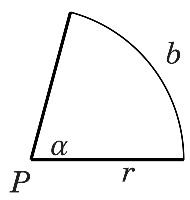

Bild 2: Winkel und Bogenmaß

Bei konkreten Zahlenwerten von Winkeln in Gradmaß muss das Gradzeichen (hochgestellter Kreis, wie in 45°) geschrieben werden.

Grad und Bogenmaß lassen sich durch einfache Multiplikationen ineinander umrechnen, allerdings mit „krummen" Faktoren.

- Zum Umrechnen eines Winkels von Gradmaß in Bogenmaß multipliziert man die Gradzahl mit dem Faktor $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453$.
- Zum Umrechnen eines Winkels von Bogenmaß in Gradmaß multipliziert man den Winkel mit dem Faktor $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}29578$.

Diese Umrechnungsfaktoren ergeben sich zum Beispiel daraus, dass der gestreckte Winkel in Bogenmaß die Größe π und in Gradmaß die Größe 180 hat. Die Größe in Bogenmaß ergibt sich daraus, dass zum gestreckten Winkel der halbe Kreisumfang (also πr) gehört, dieser ist ins Verhältnis zum Radius r zu setzen, also ergibt sich das Bogenmaß $\pi r/r = \pi$. Daher ist der gestreckte Winkel in Gradmaß zahlenmäßig $\frac{180}{\pi}$ mal so groß wie im Bogenmaß. Dieses Verhältnis ist für alle

Winkel gleich, also kann es als Umrechnungsfaktor von Bogen- in Gradmaß verwendet werden. Das umgekehrte Verhältnis liefert den Umrechnungsfaktor für die andere Richtung.

Es gibt noch andere Einheiten für die Winkelmessung; zum Beispiel die Einheit gon (manchmal auch *Neugrad* genannt). Der Vollwinkel hat 400 gon, ein rechter Winkel hat 100 gon, daher ist

$$1\,\text{gon} = 0{,}9^\circ$$

Einstellen und Prüfen der Einheiten für die Winkel bei Taschenrechnern und Computerprogrammen

Auf Taschenrechnern kann man gewöhnlich die verwendete Einheit einstellen. Die Angaben oder Bezeichnungen können von den entsprechenden englischen Wörtern abgeleitet sein. Das deutsche Wort „Grad" heißt auf Englisch „degree", abgekürzt „deg"; „radiant" heißt auf englisch „radian" (abgekürzt „rad"). Verwirrend ist vielleicht, dass die Einheit „gon" auf englisch auch „grad" oder „grade" oder „gradian" heißt. Wenn auf einem Taschenrechner als Einstellmöglichkeit „grad" angegeben ist, kann es sich um das handeln, was auf deutsch „gon" heißt, und gerade nicht um „Grad".

Man kann auf Taschenrechnern und auf Computerprogrammen prüfen, welches Einheit für die Winkel verwendet wird, indem man zum Beispiel probeweise $\sin 90$ berechnet. Ist das angezeigte Ergebnis 1, so rechnet der Taschenrechner beziehungsweise das Programm in Grad (englisch „degree"). Ist das Ergebnis $0{,}89399\ldots$, wird die Rechnung in Bogenmaß (rad) ausgeführt. Ist das Ergebnis $0{,}98766\ldots$, muss von Rechnung in gon (englisch „grad" oder ähnlich) ausgegangen werden. Zur sicheren Unterscheidung von Bogenmaß und Gon kann probeweise $\sin 100$ berechnet werden, bei Rechnung in Gon ist das Ergebnis exakt 1, bei Rechnung in Bogenmaß ist es etwa $-0{,}506\ldots$.

2.2 Sinus- und Kosinusfunktion

2.2.1 Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

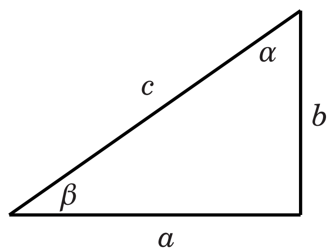

Bild 3: Rechtwinkliges Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck (siehe Bild 3) kann man den Sinus (sin) eines spitzen Winkels definieren als das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Hypotenuse. Mit den Bezeichnungen des Bildes ist

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Der Kosinus (cos) ist das Verhältnis der Länge von Ankathete zur Länge der Hypotenuse, daher ist

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Man kann sich, zum Beispiel mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze, davon überzeugen, dass die so definierten Sinus- und Kosinuswerte nur vom Winkel (nicht vom konkreten Dreieck) abhängen.

Trotzdem ist die Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck nicht ausreichend. Durch eine modifizierte Definition lassen sich sin und cos für beliebige Winkel definieren. Das ist unter anderem wichtig für die Beschreibung von Drehungen und von periodischen Funktionen.

2.2.2 Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der *Einheitskreis* ist der Kreis in einem kartesischen Koordinatensystem, der den Radius 1 und den Mittelpunkt im Koordinatenursprung hat. Die Kreislinie verläuft durch die Punkte $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

Durch eine geeignete Konstruktion am Einheitskreis lassen sich die Sinus- und die Kosinusfunktion für beliebige Winkel definieren. Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, werden Winkel im Bogenmaß angegeben.

Zur Sinus- und Kosinus-Definition werden Strahlen betrachtet, die vom Koordinatenursprung ausgehen. Jeder dieser Strahlen schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel ein. Dieser Winkel wird immer von der positiven x-Achse ausgehend im mathematisch positiven Drehsinn gemessen. Die positive y-Achse entspricht dem Winkel $\frac{\pi}{2}$, die negative x-Achse dem Winkel π, und die negative y-Achse enstpricht dem Winkel $\frac{3\pi}{2}$. Auf diese Weise entspricht jeder Winkel zwischen 0 und 2π einem solchen Strahl.

Es kommt nur auf die Teile der Strahlen an, die innerhalb des Einheitskreises liegen (also die „Radien" vom Zentrum zur Kreislinie). Diese Teile sind für einige Winkel im linken Teil von Bild 4 dargestellt. Es handelt sich um die Winkel $\frac{\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{12}$, …; also um Winkel im Abstand von $\frac{\pi}{12}$ (entspricht 15°).

Um den Sinus und den Kosinus für einen Winkel zwischen 0 und 2π zu finden, betrachtet man den Schnittpunkt des entsprechenden Strahls mit der Peripherie (Kreislinie) des Einheitskreises. Dieser Schnittpunkt hat, wie jeder Punkt in der Ebene mit kartesischem Koordinatensystem, eine x- und eine y-Koordinate. Die x-Koordinate ist der Kosinus und die y-Koordinate der Sinus des zugehörigen Winkels.

Insbesondere ist der Sinus eines Winkels die „Höhe" des Schnittpunkts des entsprechenden Strahls über der x-Achse, denn das ist ja der y-Wert.

Um konstruktiv eine angedeutete Sinuskurve (Graph der Sinusfunktion) zu erzeugen, trägt man auf der positiven x-Achse einige Winkel auf. Zu einem solchen Winkel konstruiert man den entsprechenden Strahl, geht vom Schnittpunkt des Strahls mit der Kreislinie horizontal nach rechts bis zu der Stelle, an der der Winkel liegt. An der Stelle, an der die horizontale Linie genau „über" dem Winkel liegt, markiert man einen Punkt auf dem Graphen der Sinusfunktion (im Bild 4 durch kleine Kreissymbole). Der Sinuswert von $\frac{\pi}{3}$ (entspricht 60°) ist im Bild die Länge der gestrichelten Linie.

Der Kosinus eines Winkels ist der x-Wert vom Schnittpunkt des entsprechenden Strahls mit der Kreislinie. Daraus lässt sich nicht so leicht ein sich nach rechts erstreckender Funktionsgraph erstellen. Man kann statt dessen eine nach „unten" (in negative y-Richtung) sich erstreckende Linie als Bezugslinie für den Kosinus nehmen.

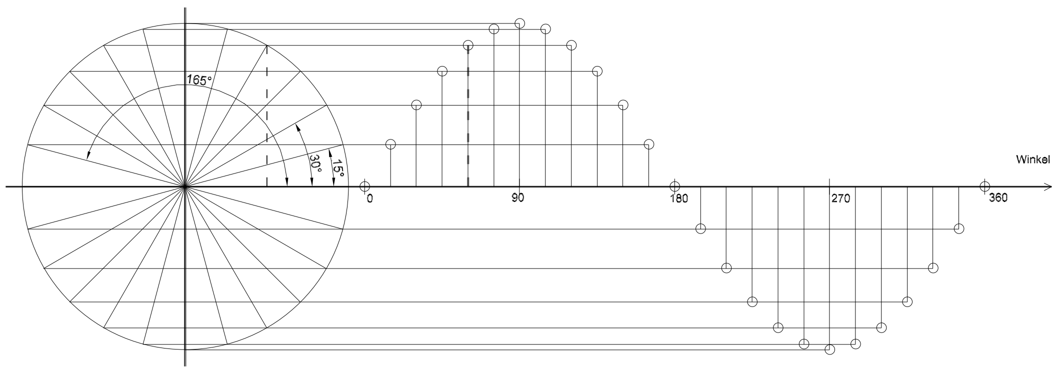

Bild 4: Sinus am Einheitskreis

Mit der Konstruktion am Einheitskreis lassen sich also zunächst die Sinus- und Kosinuswerte von Winkeln zwischen 0 und 2π erklären. Man kann die Definition auf größere und auch auf negative Winkel ausdehnen. Man kann sich zu diesem Zweck vorstellen, dass ein Zeiger (ein drehbarer Radius, im Koordinatenursprung drehbar gelagert) rotiert. Der Zeiger rotiert von seiner Ausgangsposition (positive x-Achse) ausgehend ein Stück um einen Winkel in mathematisch positiver Drehrichtung. Die Rotation kann um einen beliebigen Winkel φ erfolgen. Ist der Winkel kleiner als 2π, handelt es sich um keinen vollen Kreis. Das freie Ende des Zeigers zeigt auf einen Punkt, der auf der Kreislinie liegt. Die Koordinaten dieses Punktes sind $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$.

Der Zeiger kann auch weiter als einmal rotieren. Dann ist $\varphi > 2\pi$. Der Zeiger erreicht eine Position, die er auch mit einer Rotation von weniger als 2π hätte erreichen können. Trotzdem sind auch in diesem Fall die Koordinaten des erreichten Punktes auf der Kreislinie $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$. Wenn zum Beispiel $\varphi = \frac{9\pi}{4}$ (entspricht 405°) ist, dann hat der Zeiger eine Rotation von einem Vollkreis und zusätzlich $\frac{\pi}{4}$ ausgeführt, seine Position ist also genau so, als ob er um den Winkel

$\frac{\pi}{4}$ (45°) rotiert wäre. Daher ist

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Diese Erkenntnis lässt sich wesentlich erweitern: Es gilt immer

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi \tag{1}$$

egal wie φ ist. Das heißt, der Verlauf (die „Kurve” der Funktionen sin und cos) wiederholt sich im Abstand von 2π. Derartige Funktionen nenn man *periodisch*. Allgemein: Eine Funktion f heißt periodisch, wenn es eine reelle Zahl $T > 0$ gibt, so dass für alle x aus dem Definitionsbereich der Funktion f gilt:

$$f(x + T) = f(x)$$

Die Zahl T ist dann eine *Periode* der Funktion f. Die Sinus- und die Kosinusfunktion habe die Periode 2π.

Der Zeiger um den Koordinatenursprung kann sich auch ein Stück in mathematisch negativer Richtung (also *im* Uhrzeigersinn) um den Koordinatenursprung drehen. In diesem Fall ist der Drehwinkel φ negativ. Die Koordinaten der erreichten Position der Zeigerspitze sind wieder $\cos\varphi$ beziehungsweise $\sin\varphi$. Natürlich hätte die selbe Position auch durch einen positiven Winkel (Drehung gegen Uhrzeigersinn) erreicht werden können. Daher ist zum Beispiel

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind durch diese Vereinbarung für alle reellen Winkel φ definiert, und sie sind überall periodisch mit der Periodenlänge 2π.

Graphisch dargestellt sind ein Stück der Sinus- und der Kosinusfunktion in Bild 5. Die durchgezogene Linie ist der Sinus, die gestrichtelte der Kosinus.

Die Nullstellen der Sinusfunktion sind bei $-\pi$, 0, π, 2π, ... Die Nullstellen des Kosinus sind bei $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... Allgemein kann man sagen, dass alle Nullstellen der Sinusfunktion in der Form $k\pi$ darstellbar sind, wobei k eine beliebige ganze Zahl (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...) ist. Beim Kosinus sind die Nullstellen in der Form $\frac{\pi}{2} + k\pi$ darstellbar.

Im Bild 6 sind Sinus- und Kosinusfunktion für Winkel im Gradmaß dargestellt.

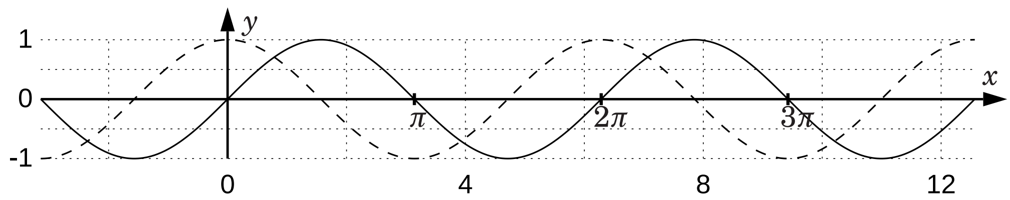

Bild 5: Sinus und Kosinus

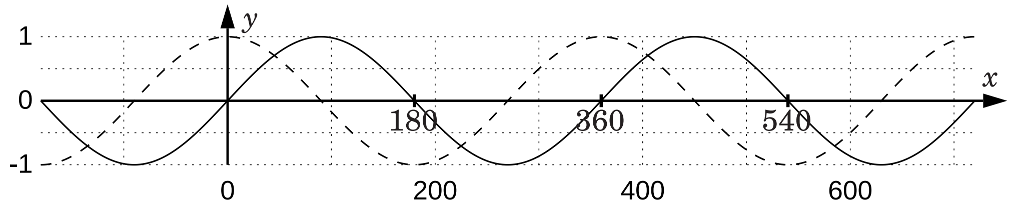

Bild 6: Sinus und Kosinus, Winkel in Grad

2.2.3 Einige Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion

Sinus und Kosinus nehmen immer Werte zwischen -1 und 1 an. Das ergibt sich aus der Definition am Einheitskreis: Die Koordinaten der Punkte des Einheitskreises liegen immer zwischen -1 und 1; und Sinus und Kosinus sind nach Definition Koordinaten von Punkten auf dem Einheitskreis.

Eine wichtige Formel ist der so genannte „trigonometrische Satz des Pythagoras”: Sei φ irgend ein Winkel, dann gilt

$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$$

Anstelle von $(\sin\varphi)^2$ wird häufig $\sin^2\varphi$ geschrieben; entsprechend auch für den Kosinus. Damit sieht der „trigonometrische Pythagoras” so aus:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Diese Formel ist auch leicht aus der Definition am Einheitskreis ableitbar.

Nicht ganz so leicht ableitbar sind die folgenden *Additionstheoreme* für Sinus und Kosinus.

Es seien α und β beliebige Winkel. Dann gilt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

In den Additionstheoremen kann $\alpha = \beta$ sein, in diesem Fall ist $\alpha + \beta = 2\alpha$, und aus den Additionstheoremen ergeben sich die folgenden Sätze für „Sinus und Kosinus vom doppelten Winkel”:

$$\sin(2\alpha) = 2(\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha)$$

und

$$\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

Die Kosinusfunktion kann als verschobene Sinusfunktion angesehen werden (und umgekehrt): Für alle α gilt:

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.2.4 Sinusförmige Funktionen

Das sind Funktionen, die man grafisch durch Strecken oder Dehnen, in x-Richtung und unabhängig davon in y-Richtung, sowie durch Verschiebung in x-Richtung, aus der Sinusfunktion erhalten kann. Die Kosinusfunktion ist in diesem Sinne eine sinusförmige Funkton, denn sie entsteht durch Verschiebung der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach links. *Sinusförmig* ist eine gebräuchliche, aber nicht ganz formale Bezeichnung. Man kann auch *harmonische* Schwingung sagen, oder genauer *ungedämpfte harmonische Schwingung*.

Sinusförmige Funktionen lassen sich in der Form

$$f(t) = A\sin(\omega t + \Phi) \tag{2}$$

mit geeigneten Konstanten $A > 0$, $\omega > 0$ und Φ darstellen. Weil solche Funktionen typischerweise zeitabhängige periodische physikalische oder technische Vorgänge beschreiben, wird hier t als unabhängige Variable verwendet, das ist aber nicht wesentlich.

Die Größe A ist die *Amplitude* der Funktion (größte Abweichung von 0), ω (gesprochen: *omega*) ist die so genannte *Kreisfrequenz* oder *Winkelgeschwindigkeit* und Φ ist der *Phasenwinkel* der Funktion.

Wenn man in Gleichung (2) die unabhängige Variable t um $\frac{2\pi}{\omega}$ vergrößert, ändert sich der Funktionswert $f(t)$ nicht:

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left(\omega\cdot\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \Phi\right) = A\sin(\omega t + 2\pi + \Phi) = A\sin(\omega t + \Phi) = f(t)$$

Damit ist die Funktion f periodisch mit der Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\omega}$, und eine kürzere Periodenlänge gibt es nicht. Die *Frequenz* ist $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, und die Kreisfrequenz ist das 2π-fache der Frequenz, also ω.

Der Phasenwinkel Φ gibt an, in welcher Schwingungsphase die Funktion f zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Wenn zum Beispiel $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ist, dann ist

$$f(0) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$$

und das heißt, die Funktion (oder der beschriebene Schwingungsvorgang) befindet sich an ihrem oberen Maximalwert.

Der Phasenwinkel ist besonders wichtig, wenn man mehrere periodische Vorgänge mit gleicher Frequenz gleichzeitig betrachtet. Man kann zum Beispiel zeigen, dass die Summe von zwei sinusförmigen Funktionen mit gleicher Frequenz wieder sinusförmig ist (mit der selben Frequenz). Seien zum Beispiel die sinusförmigen Funktionen

$$f_1(t) = 3\sin(t) \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = 2\sin(t+\Phi)$$

gegeben. Dann ist

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

auch sinusförmig. Welche Amplitude hat f_3? Die Antwort wird hier nicht gegeben, aber es sei gesagt, dass die Amplitude von f_3 von Φ abhängt (und natürlich auch von den Amplituden von f_1 und f_2). Bild 7 zeigt die Situation mit $\Phi = 1{,}2$. Die mit durchgezogener Linie dargestellte Funktion ist die Summe der beiden anderen.

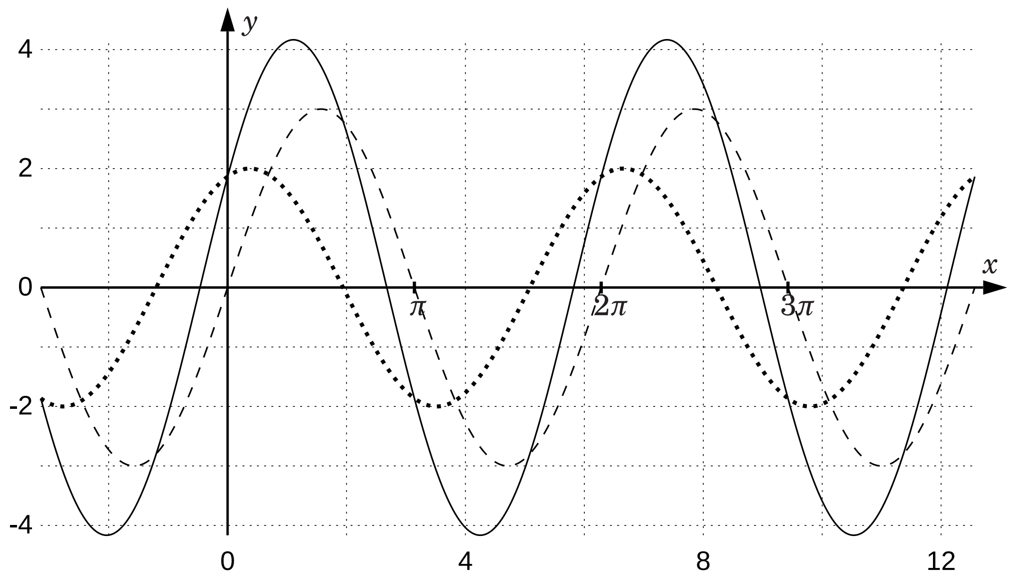

Bild 7: Summe von zwei sinusförmigen Funktionen

2.3 Die Tangensfunktion

2.3.1 Definition der Tangensfunktion durch Sinus und Kosinus

Die Tangensfunktion (tan) ist definiert als Quotient von Sinus und Kosinus:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Die Tangensfunktion ist daher dort nicht definiert, wo der Kosinus den Wert Null annimmt (siehe Abschnitt 2.2.2); das heißt, wenn x von der Form $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ist (mit ganzzahligem k). Darüber hinaus ist der Tangens in der Nähe solcher Werte sehr groß oder sehr klein (weit im Negativen). Zum Beispiel ist

$$\tan 1{,}57 = 1255{,}76559\ldots \qquad \text{und} \qquad \tan 1{,}572 = -830{,}78987\ldots$$

Die Tangensfunktion ist periodisch mit der Periodenlänge π (das entspricht 180° und ist die Hälfte der Periodenlänge von Sinus- und Kosinusfunktion). In Bild 8 ist ein Stück der Tangensfunktion dargestellt. Der dargestellte Wertebereich ist dort oben und unten abgeschnitten.

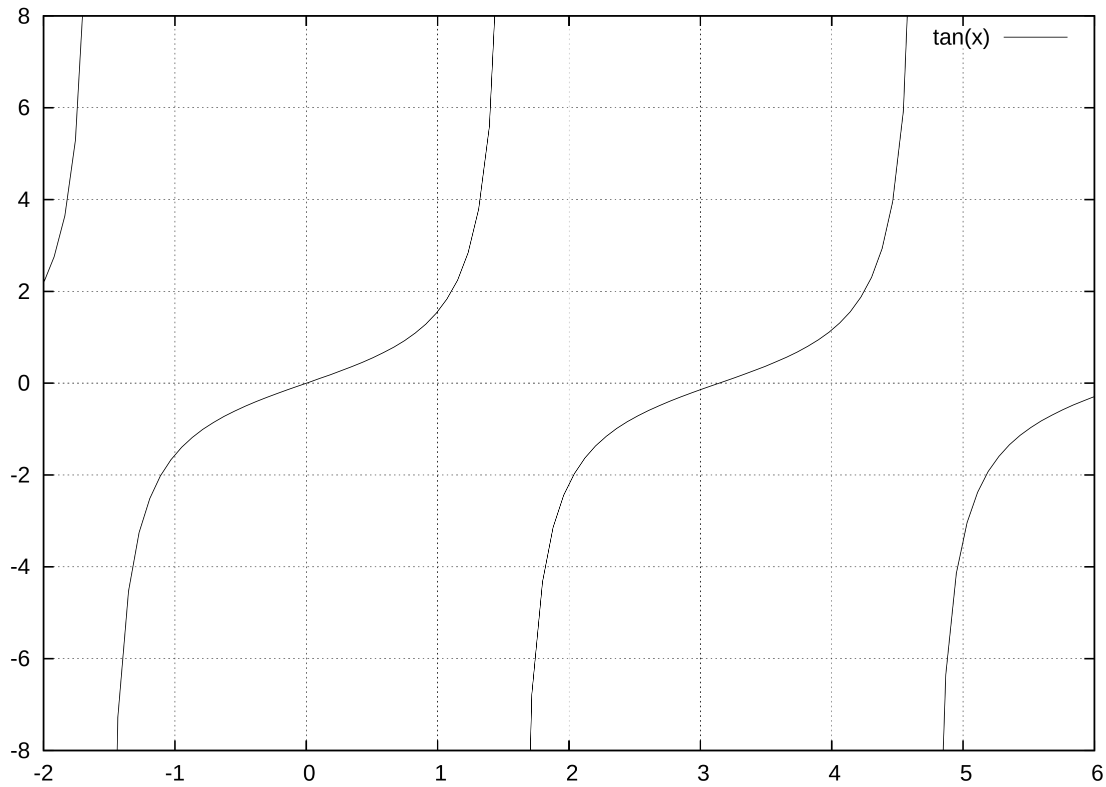

Bild 8: Die Tangensfunktion

2.3.2 Die Tangensfunktion am rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens eines der spitzen Winkel gleich dem Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete. Zum Beispiel ist im Bild 3

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

In der Darstellung von Bild 3 ist die Hypotenuse eine von links nach rechts ansteigende gerade Strecke, die mit der Horizontalen den Winkel β bildet. Je größer β ist, desto steiler ist der Anstieg. Der Anstieg lässt sich aber auch durch das Verhältnis von b zu a ausdrücken: Wenn man horizontal um a Einheiten nach rechts geht, gewinnt man b Einheiten an Höhe. Pro Einheit in horizontaler Richtung ist also der Höhengewinn $\frac{b}{a} = \tan\beta$ Einheiten.

Im Prinzip die selbe Situation tritt in Zusammenhang mit linearen Funktionen auf. Siehe Bild 9. Hier sind Δx und Δy die Katheten eines rechtwinkligen

Dreiecks (des *Steigungsdreiecks*) am Graphen der linearen Funktion: Wenn x um Δx vergrößert wird, vergrößert sich y um Δy. Das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Faktor, der in der Funktionsgleichung der linearen Funktion f vor x steht: $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x + n$. Und es ist natürlich wieder $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\beta$, daher kann man auch $f(x) = (\tan\beta) \cdot x + n$ schreiben. Der Winkel β ist der *Anstiegswinkel* und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\beta$ ist der *Tangens des Anstiegswinkels*.

Die Überlegung funktioniert auch für fallende Funktionen. Dann ist der Anstiegswinkel negativ, der Tangens ist dabei auch negativ, weil dann Δy negativ ist.

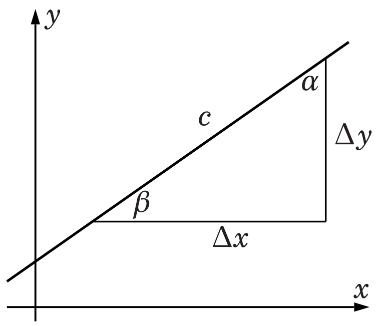

Bild 9: Steigungsdreieck an einer linearen Funktion

3 Inverse trigonometrische Funktionen

Mit den trigonometrischen Funktionen berechnet man zu einem gegebenen Winkel eine Zahl (typischerweise interpretierbar als Verhältnis von Seitenlängen). Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch. Daher passen zu derselben Zahl viele Winkel.

Zum Beispiel ist $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Wegen der Periodizität der Sinusfunktion ist auch $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0{,}5$; der Winkel wurde hier um 2π vergrößert. Außerdem ist zum Beispiel $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

Man kann also nicht allgemein vom Sinuswert eines Winkels auf den Winkel selbst schließen. Trotzdem ist so etwas wie eine Invertierung (Umkehrung) der Sinusfunktion und anderer trigonometrischer Funktionen in vielen Situationen wünschenswert.

3.1 Der Arkussinus

Um diese Umkehrbarkeit zu erreichen, muss der Definitionsbereich des Sinus eingeschränkt werden. Die übliche Variante ist die Einschränkung auf das abgeschlossene Intervall $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Auf diesem Intervall ist der Sinus streng monoton wachsend, er nimmt alle Werte zwischen -1 und 1 genau einmal an. Daher kann man für jeden Wert y zwischen -1 und 1 genau einen Wert x (einen Winkel) zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ finden, so dass $\sin x = y$ gilt. Diesen Wert x nennt man *Arcussinus* von y. Symbolisch schreibt man $\arcsin y$ oder $\mathrm{asin} y$ oder auch $\sin^{-1} y$. Die letzte Schreibweise ist auf Taschenrechnern üblich, aber problematisch, weil der Exponent hier etwas ganz anderes bedeutet als in der auch verbreiteten Schreibweise $\sin^2 x$ für $(\sin x)^2$.

Ein Beispiel für den Arkussinus: Es ist $\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$, weil $\frac{\pi}{6}$ zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt und $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$ ist.

Allgemein gilt
$\sin(\arcsin y) = y$ für alle y zwischen -1 und 1 (Grenzen eingeschlossen), und
$\arcsin(\sin x) = x$ für alle x zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ (Grenzen eingeschlossen).

Durch diese Festlegungen und Eigenschaften ist noch kein Weg gegeben, um den Arkussinus eines Wertes direkt und effektiv zu berechnen. Das ist ein anderes Thema, das hier nicht behandelt wird. Taschenrechner und geeignete Computerprogramme (Tabellenkalkulation, Mathematikprogramme) können das normalerweise. Es sei angemerkt, dass der Sinus selbst sich auch nicht für beliebige Winkel auf elementare Art berechnen lässt.

Genau wie beim Sinus und den anderen trigonometrischen Funktionen muss man beim Umgang mit dem Arkussinus auf das Maß für die Winkel achten. Die Arkussinusfunktion auf dem Taschenrechner kann Gradmaß oder Bogenmaß (oder vielleicht auch Gon) verwenden.

Im Unterschied zum Sinus liegt beim Arcussinus das Problem im Ergebnis der Berechnung, weil das Ergebnis der Winkel ist. Der „Input” (mathematisch sagt man: das *Argument*) für den Arkussinus ist eine dimensionslose Zahl (ein Verhältnis von Seitenlängen), das nicht durch verschiedene Zahlenwerte darstellbar ist. Das Ergebnis ist ein Winkel, der in Grad- oder Bogenmaß angegeben sein kann.

Beim Sinus ist der „Input” ein Winkel; die Größe desselben Winkels kann durch verschiedene Zahlenwerte darstellbar ist, je nachdem, ob Bogenmaß oder Gradmaß oder noch etwas anderes verwendet wird.

Mathematisch ausgedrückt ist der Arkussinus die inverse Funktion des Sinus. Genauer gesagt: Der Arkussinus ist die inverse Funktion der auf das Intervall $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Sinusfunktion.

Man kann die Graphen von Sinus und Arkussinus zusammen darstellen, siehe Bild 10. Die gestrichelte Linie ist der Graph des Arkussinus.

3.2 Der Arkustangens

Die Tangensfunktion ist periodisch mit der Periodenlänge π. Im offenen Intervall $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ erreicht die Tangensfunktion alle reellen Zahlen als Werte. Anders ausgedrückt: Für jede reelle Zahl y gibt es eine Zahl x (einen Winkel) aus dem offenen Intervall $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, so dass $y = \tan x$ gilt. Weil die Tangensfunktion in diesem Intervall streng monoton wachsend ist, gibt es auch *nur ein* solches x. Daher lässt sich die auf das offene Intervall $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ eingeschränkte Tangensfunktion umkehren (invertieren). Die so entstandene Umkehrfunktion heißt *Arkustangens*, symbolisch

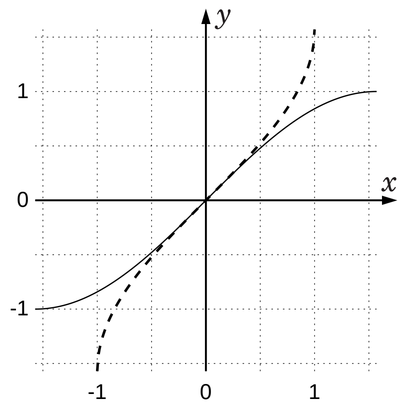

Bild 10: Sinus (durchgezogen) und Arkussinus (gestrichelt)

arctan oder atan oder auch $\tan^{-1}$.

Anmerkung: Ein *offenes Intervall* enthält seine Grenzen nicht. Das wird durch die „verkehrt herum" angeordneten Klammern (Öffnung nach außen) ausgedrückt.

Zu einer gegebenen reellen Zahl y ist also $\arctan y$ der Winkel x aus dem Intervall $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ für den $\tan x = y$ gilt. Es gibt genau einen solchen Winkel.

Zum Beispiel ist $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, weil $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ gilt und $\frac{\pi}{4}$ aus $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ist.

Allgemein gilt

$\tan(\arctan y) = y$ für alle reellen Zahlen y, und

$\arctan(\tan x) = x$ für alle x zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ (Grenzen ausgeschlossen).

Die Arkustangensfunktion ist streng monoton wachsend auf ihrem ganzen Definitionsbereich, der alle reellen Zahlen umfasst. In negativer Richtung nähert sich der Arkustangens an den Wert $\frac{-\pi}{2}$ an, in positiver Richtung an $\frac{\pi}{2}$. In Bild 11 ist ein Stück der Arkustangensfunktion dargestellt.

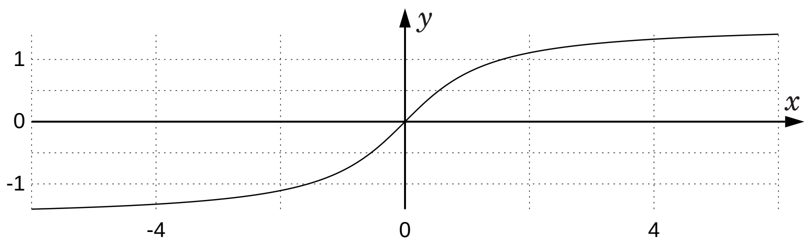

Bild 11: Der Arkustangens